VII RAZRED

2006. Opštinsko takmičenje

1. Одредити 2006-у цифру иза децималног зареза у децималном запису броја $\frac{21}{37}$.

2. При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децимални зарез за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требао да сабере?

3. У оштроуглом једнакокраком троуглу ABC дужина основице AB већа је од дужине крака BC. Симетрала угла на основици и висина из истог темена граде угао од 18°. Колики је угао на основици тог троугла?

$AB > BC$

4. Нека је $ABCD$ правоугаоник ($AB > CD$), а тачке E и F су такве да су троуглови AED и CDF једнакостранични и тачка E припада унутрашњости и правоугаоника $ABCD$ и троугла CDF. Доказати да је троугао BEF једнакостраничан.

5. Таблица 5×5 попуњена је на произвољан начин бројевима из скупа $\{-1, 0, 1\}$. Посматрају се збирови тих бројева по врстама, колонама и обе дијагонале таблице. Доказати да међу њима бар два морају бити једнака.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

7. РАЗРЕД

1. Израчунати вредност израза $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2}-(\sqrt{5}-5)$.

2. У правоуглом троуглу ABC дужине катета AC и BC су редом 30 cm и 40 cm. Ако је C_1 средиште хипотенузе, а C_2 подножје хипотенузине висине, израчунати дужину дужи C_1C_2.

3. Дужине страница AB и BC правоугаоника $ABCD$ су редом 5 cm и 3 cm. Пресек праве која садржи тачке B и C и симетрале угла BAD је тачка M, а пресек праве која садржи тачке A и D и симетрале угла BCD је тачка N. Израчунати површину четвороугла $ANCM$.

4. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15, а свака цифра му је 0 или 4.

5. Одредити најмањи природан број који се може добити кад се у изразу $1*2*3*\cdots*2005*2006$ свака звездица замени са $+$ или $-$.

2007. Okružno takmičenje

7. РАЗРЕД

1. Доказати да је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > 3$.

2. У квадрат чија је дужина странице 10 cm уписан је правилни дванаестоугао, тако да свакој страници квадрата припада по једна страница дванаестоугла. Израчунати дужину странице тог дванаестоугла.

3. Упоредити бројеве $3^{2007} - 2^{3000}$ и $2007 \cdot 2^{2007}$.

4. Испитати да ли постоји троугао чије су дужине висина 1 cm, 2 cm и 3 cm.

5. Одредити колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна од тих цифра не појављује више од два пута у запису броја.

VII РАЗРЕД

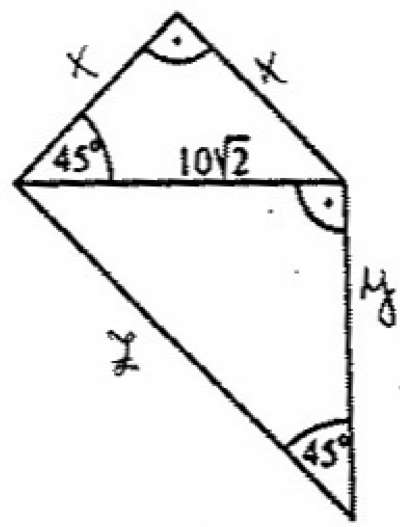
1. Израчунај вредност израза $8x^3 - 4x^2$ за $x = \sqrt{2 + \frac{1}{4}}$.

2. Ако многоугао има $\frac{5}{2}$ пута више дијагонала него страница, израчунај збир свих његових унутрашњих углова.

3. Одредити x ако је

$$\frac{2008^{2007} + 2008^{2008}}{2009} = 2008^x.$$

4. Израчунај обим и површину четвороугла са слике.



5. Одредити целе бројеве a и b ако је

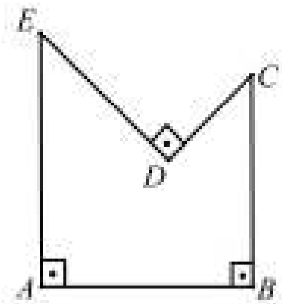
$$a\sqrt{3} + b = \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} + 3.$$

VII РАЗРЕД

1. Ако је $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, израчунај:

$$(x-y)^3 - (x-y^3) + (-x \cdot y^3) - (-x \cdot y)^3.$$

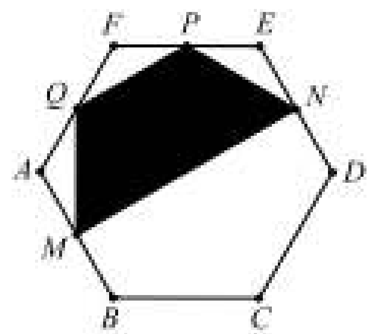
2. Нађи обим многоугла на слици ако је $AE = 13cm$, $BC = 7cm$, $ED = 8cm$ и $CD = 6cm$ и ако је $\angle EAB = \angle ABC = \angle CDE = 90°$.



3. Ако је $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{18}$, израчунај вредност израза

$$\frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}}.$$

4. Одреди однос површина правилног шестоугла $ABCDEF$ и четвороугла $MNPQ$ на слици ако су M, N, P, Q средишта страница AB, DE, EF, FA.



5. Нађи просте троцифрене бројеве чији је производ цифара 252.

VII РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза

$$\sqrt{\left(\sqrt{2\,008}-45\right)^2}+\sqrt{\left(44-\sqrt{2\,008}\right)^2}.$$

2. У правоуглом троуглу је $t_a = 2\sqrt{13}cm$ и $t_b = \sqrt{73}cm$. Израчунај хипотенузу тог правоуглог троугла.

3. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, чија је страница $a = 8cm$. Израчунај површину троугла $A_1A_2A_5$.

4. Да ли је израз

$$1\,004^2 - 1\,003^2 + 1\,002^2 - 1\,001^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

дељив са 2 008?

5. Природан број зовемо "симпатичним" ако је производ његових цифара паран. Колико има "симпатичних" шестоцифрених бројева?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

VII РАЗРЕД

1. Докажи да вредност израза $\dfrac{\left(8^5\right)^{4n}}{\left(32^{3n}\right)^4}$ не зависи од n.

2. Упрости израз $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}$ ако је $x=2-\sqrt{3}$.

3. У једнакостранични троугао странице 6cm, уписан је круг, а у круг је уписан квадрат. Израчунај површину тог квадрата. Који део површине троугла заузима површина квадрата?

4. За четвороугао $ABCD$ је познато да је
$AB=4\text{cm}$, $BC=4\sqrt{2}\text{ cm}$, $CD=\sqrt{2}\text{ cm}$, $\sphericalangle ABC=45^0$ и $\sphericalangle BCD=90^0$.
Израчунај обим и површину тог четвороугла.

5. На фудбалској утакмици у једном реду седишта на трибинама сео је известан број гледалаца. Затим је између свака два гледаоца сео још по један гледалац. Овакав начин заузимања места (седишта) поновио се укупно три пута (још 2 пута), па је после тога у том реду било 2009 гледалаца. Колико је гледалаца на почетку село у овај ред?

VII РАЗРЕД

1. Докажи да је број $4^9+6^{10}+3^{20}$ квадрат неког природног броја.

2. Израчунај површину правоуглог троугла чији је обим 36cm, ако за странице тог троугла важи $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$ (a и b су катете, c хипотенуза).

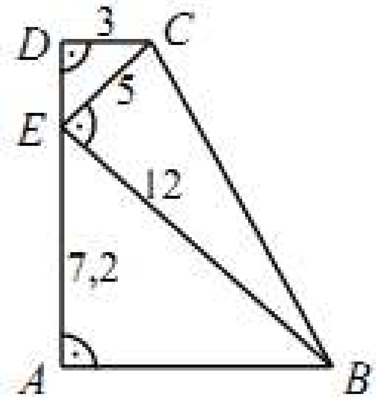
3. Нека је $m=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n+57$. Одреди све природне бројеве n за које је број m квадрат неког природног броја.

4. Од квадрата су одрезана 4 правоугла троугла тако да је добијен правилан осмоугао. Израчунај површину тог осмоугла ако је страница квадрата 10cm.

5. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?

VII РАЗРЕД

1. Да ли је $\sqrt{0,\overline{1}}$ рационалан или ирационалан број?
$(0,\overline{1} = 0,111...)$



2. Израчунај обим и површину трапеза са слике.

3. Шта је веће 2^{2010} или 5^{861}?

4. Четири друга имају по једну оловку. На колико начина они могу да размене своје оловке али тако да ни један друг не добије своју оловку?

5. На страници AB троугла ABC дата је тачка D, а на страници AC тачка E тако да изломљена линија DEB дели троугао ABC на три троугла једнаких површина. У ком односу тачке D дели страницу AB, а у ком односу тачка E дели страницу AC?