34. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Охрид, Македонија – 4. мај 2017.

1. Одредити све уређене парове природних бројева (x, y) такве да важи

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2.$$

(Молдавија)

2. Нека је Γ описани круг оштроуглог троугла ABC у коме је $AB < AC$. Означимо са t_B и t_C редом тангенте на круг Γ у тачкама B и C, а са L њихову тачку пресека. Права кроз B паралелна правој AC сече t_C у тачки D, а права кроз C паралелна правој AB сече t_B у тачки E. Описани круг троугла BDC сече праву AC у тачки T између A и C. Описани круг троугла BEC сече праву AB у тачки S тако да је B између A и S.

Доказати да се праве ST, BC и AL секу у једној тачки. *(Грчка)*

3. Наћи све функције $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да

$$n + f(m) \ \text{ дели } \ f(n) + nf(m)$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$. (Са $\mathbb{N}$ означавамо скуп природних бројева.) *(Албанија)*

4. Око округлог стола седи $n > 2$ ученика. У почетку сваки ученик има тачно једну бомбону. У сваком кораку, сваки ученик бира једну од следеће две операције:

(i) даје једну своју бомбону ученику лево од себе или ученику десно од себе;

(ii) дели све своје бомбоне на два скупа (не обавезно непразна) и један скуп даје ученику лево, а други ученику десно од себе.

Све операције у једном кораку извршавају се истовремено. Распоред бомбона зовемо *достижним* ако се може добити у коначно много корака. Колико има достижних распореда?

(Два распореда су различита ако бар један ученик у њима има различит број бомбона.) *(Кипар)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Нека је $x = dx_1$ и $y = dy_1$, где је $d = (x, y)$. Дата једначина се може записати као

$$d(x_1+y_1)(x_1^2-x_1y_1+y_1^2) = x_1^2-x_1y_1+y_1^2+43x_1y_1, \qquad (*)$$

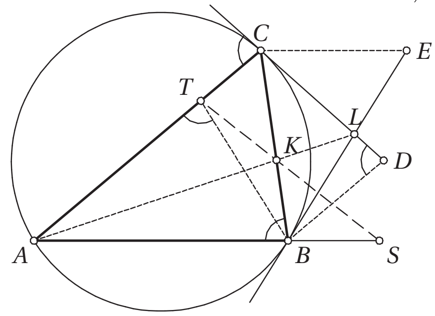
одакле следи да $x_1^2-x_1y_1+y_1^2 \mid 43x_1y_1$. Како је $(x_1, x_1^2-x_1y_1+y_1^2) = (y_1, x_1^2-x_1y_1+y_1^2) = (x_1, y_1) = 1$, следи да $x_1^2-x_1y_1+y_1^2 \mid 43$. Приметимо да је $x_1^2-x_1y_1+y_1^2 > 0$.

Ако је $x_1^2-x_1y_1+y_1^2 = 1$, мора бити $x_1 = y_1 = 1$, и $(*)$ даје $x = y = d = 22$.

Нека је $x_1^2-x_1y_1+y_1^2 = 43$, тј. $(2x_1-y_1)^2+3y_1^2 = 172$, и нека је без смањења општости $x_1 \leqslant y_1$. Тада је $3y_1^2 \leqslant 172 \leqslant 4y_1^2$, што важи једино за $y_1 = 7$. Добијамо $x_1 = 1$ и $d = 1$, или $x_1 = 6$ и $d = \frac{43}{13}$. Само прва могућност има смисла и даје решење $(x, y) = (1, 7)$.

Сва решења (x, y) су парови $(1, 7)$, $(7, 1)$ и $(22, 22)$.

2. Означимо $AC = b$ и $AB = c$. Како је $\sphericalangle BTA = \sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle DCA = \sphericalangle ABC$, троуглови ATB и ABC су слични, па је $\frac{AT}{AB} = \frac{AB}{AC}$, тј. $AT = \frac{c^2}{b}$ и одатле $TC = \frac{b^2-c^2}{b}$. Слично је $AS = \frac{b^2}{c}$ и $SB = \frac{b^2-c^2}{c}$.



С друге стране, права AL је симедијана у троуглу ABC и сече страницу BC у тачки Kтаквој да је $\frac{BK}{KC} = \frac{c^2}{b^2}$. Следи да је $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CT}}{\overrightarrow{TA}} = \frac{b^2}{c^2-b^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2-c^2}{c^2} = -1$, па по Менелајевој теореми тачка K припада правој ST.

Напомена. Једнакост $\frac{BK}{KC} = \frac{c^2}{b^2}$ се може добити и из синусне теореме: $\frac{BK}{KC} = \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AK}{CK} = \frac{\sin\sphericalangle BAK}{\sin\sphericalangle ABK} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ACK}{\sin\sphericalangle CAK} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin\sphericalangle BAL}{\sin\sphericalangle CAL} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin\sphericalangle BAL}{\sin\sphericalangle ABL} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ACL}{\sin\sphericalangle CAL} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ABL}{\sin\sphericalangle ACL} = \frac{c}{b} \cdot \frac{BL}{AL} \cdot \frac{AL}{CL} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ACB}{\sin\sphericalangle ABC} = \frac{c^2}{b^2}$.

3. Из услова задатка следи $n+f(m) \mid f(n)+nf(m)-n(n+f(m)) = f(n)-n^2$. За $m = n = 1$ добијамо $f(1)+1 \mid f(1)-1$, одакле је $f(1) = 1$.

Функција $f(x) \equiv x^2$ задовољава услове задатка. Претпоставимо да за неко n_0 важи $f(n_0) \neq n_0^2$. Из $n_0+f(m) \mid |f(n_0)-n_0^2|$, следи $f(m) \leqslant A = |f(n_0)-n_0^2|-n_0$. С друге стране, за $m = 1$ имамо $n+1 \mid f(n)+n$, тј. $f(n) \equiv 1 \pmod n$, али $f(n) < A+1$, па мора бити $f(n) = 1$ за све $n \geqslant A$.

Најзад, за свако $n > A$ важи $n+f(m) \mid f(m)(n+f(m))-(f(n)+nf(m)) = f(m)^2-1$, па је $f(m) = 1$ за све $m \in \mathbb{N}$, што је такође решење.

Према томе, једина решења су функције $f(x) \equiv x^2$ и $f(x) \equiv 1$.

4. Укупан број распореда (достижних и недостижних) је $\binom{2n-1}{n}$.

Лема. У два корака, сваки ученик може да дода бомбону (ако је има) ученику на два места лево или десно од себе, тако да стање код осталих ученика буде непромењено.

Доказ. Посматрајмо три узастопна ученика A, B и C слева надесно, при чему A има бар једну бомбону. Нека сви ученици извршавају операцију (ii). Тада се свака бомбона произвољно помера за једно место улево или удесно. Први корак може да се изврши тако да се све бомбоне помере удесно, а други корак тако да се све бомбоне врате улево, осим једне код ученика B која ће се померити удесно ученику C. Тако је једна бомбона ученика A завршила код ученика C. Други смер је аналоган. □

Нека је n непарно. Како је растојање између свака два ученика у једном смеру парно, коришћењем Леме, сваки ученик може да дода бомбону произвољном ученику у парном броју корака. Према томе, сви распореди су достижни.

Нека је сада n парно. Једноставном индукцијом следи да се после сваког корака код ученика на парним, односно непарним позицијама налази бар по једна бомбона. Распореди у којима су све бомбоне код $\frac{n}{2}$ ученика на парним или $\frac{n}{2}$ ученика на непарним позицијама су недостижне, а њих има $2\binom{3n/2-1}{n}$. Остаје да покажемо да су сви остали распореди достижни.

С обзиром на Лему, довољно је показати да је за свако $a = 1, 2, \ldots, n-1$ могуће добити бар један распоред у коме се тачно a бомбона налази на парним позицијама. За почетак, по Леми, све бомбоне се могу проследити двома суседним ученицима A и B, где је A на парној позицији. Нека у том тренутку, без смањења општости, A има $a' > a$ бомбона. У првом потезу, A ће додати једну бомбону ученику B, а B једну бомбону свом другом суседу C. У другом потезу, A и B ће разменити по једну бомбону, а C ће вратити бомбону ученику B. Сада A има $a'-1$ бомбона, а B преосталих $n-a'+1$. Понављањем овог поступка $a'-a$ пута постижемо циљ.

Према томе, достижних распореда има $\binom{2n-1}{n}$ ако $2 \nmid n$, и $\binom{2n-1}{n} - 2\binom{3n/2-1}{n}$ ако $2 \mid n$.