Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Први разред – А категорија

1. На табли је записан позитиван реалан број x. У једном кораку дозвољено је урадити следеће: уколико је на табли већ записан број a, дозвољено је дописати неки од бројева $a+1$ или $\frac{1}{a}$, или, уколико су на табли већ записани бројеви a и b за које важи $a > b$, тада је дозвољено дописати неки од бројева $a+b$ или $a-b$. Доказати да је после коначно много корака могуће добити на табли број x^2.

2. Нека је $P(n)$ производ свих цифара природног броја n. Наћи све природне бројеве n за које важи $n = P(n) + 18$.

3. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да природни бројеви c и d такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ постоје ако и само ако је бар један од бројева a и b паран.

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама P и Q, при чему кружница k_1 пролази кроз центар кружнице k_2. Различите тачке A и B леже на делу кружнице k_1 који је унутар k_2 и притом су једнако удаљене од центра кружнице k_2. Ако права PA сече k_2 у тачки $D \not\equiv P$, доказати да тада важи $AD = PB$.

5. У биоскопску салу која има 2015 места ушло је 2014 посетилаца, међу којима је и Мика. Сви ови посетиоци сели су на произвољна места, не обазирући се на то које место им је намењено према карти. На пола филма у салу улази 2015. посетилац. Он жели да седне баш на своје место према карти, и уколико је оно заузето, подићи ће с тог места гледаоца који ту седи. Подигнути гледалац потом гледа које је његово седиште, и ако је оно заузето, и он ће подићи гледаоца који седи на његовом месту. Овакав поступак се наставља све док не буде подигнут гледалац коме је према карти додељено место које је слободно (и он ће тада сести на то место). Нека је a број оних почетних распореда за које ће током читавог овог комешања и Мика у неком моменту бити подигнут, а b број преосталих почетних распореда. Који од следећа три односа важи: $a > b$, $a = b$ или $a < b$?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Други разред – А категорија

1. Решити систем једначина:

$$uv = 3u - v + 1;$$
$$vw = 3v - w + 1;$$
$$wu = 3w - u + 1.$$

2. Пред Рајом Ратком на табли стоји записан природан број у коме су сунђером обрисане две цифре између којих се налази паран број (познатих) цифара. Раја зна остатке полазног броја при дељењу са 9 и са 11 и покушава да открије две обрисане цифре. Испоставило се да Раја није у могућности да открије цифре које недостају, тј. постоји више уређених парова цифара (x, y) таквих да се, за сваки такав уређен пар, уписивањем цифара из тог уређеног пара на место обрисаних цифара добија број који при дељењу са 9 и са 11 даје управо оне остатке који су познати Раји. Одредити између којих могућности за уређен пар (x, y) Раја Ратак не може да се определи.

3. У $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 45^\circ$ и $\measuredangle CBA = 15^\circ$. На продужетку странице AC преко тачке C уочена је тачка M таква да важи $CM = 2AC$. Одредити $\measuredangle AMB$.

4. Дат је $\triangle ABC$ у ком важи $\measuredangle C = 90^\circ$. Нека је P тачка на краћем луку AC кружнице описане око $\triangle ABC$. Нормала из тачке C на праву CP сече праве AP и BP у тачкама K и L, редом. Доказати да однос површина $\triangle BKL$ и $\triangle ACP$ не зависи од избора тачке P.

5. Нека је уочен природан број n дељив са 8. Посматрајмо све подскупове скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ чија је кардиналност дељива са 4 или даје остатак 1 при дељењу са 4. Нека је број таквих подскупова једнак m. Показати да m у бинарном запису садржи тачно две цифре 1.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $p \geqslant 3$ прост број. Доказати:

$$p^2 \mid \left(\frac{p^2+1}{2}\right)^p + ((p-3)!)^{1+(p-1)!}.$$

2. Одредити све вредности параметра c за које систем једначина:

$$x^2 - yz = 1;$$
$$y^2 - zx = 2;$$
$$z^2 - xy = c$$

има решење у скупу ненегативних реалних бројева.

3. У конвексном четвороуглу дужине свих страница и дијагонала су рационални бројеви. Да ли тада и дужине одсечака дијагонала на које их дели њихова пресечна тачка морају бити рационални бројеви?

4. На табли је на почетку записан број 1. У n-том кораку спроводи се следећи поступак: сваки број на табли се обрише и уместо њега се запише низ бројева, и то тако што се, уколико је обрисан број i, уместо њега напише низ $1, 2, \ldots, i-1$ (специјално, уколико је обрисан број 1, уместо њега се у овом моменту не уписује ништа); потом се додатно на таблу допише број $n+1$. Одредити колико ће бројева бити на табли након 2015 оваквих корака.

5. У конвексном четвороуглу $ABCD$ познати су углови: $\measuredangle BCA = 40°$, $\measuredangle BAC = 50°$, $\measuredangle BDA = 20°$ и $\measuredangle BDC = 25°$. Одредити угао који заклапају дијагонале тог четвороугла.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп вредности израза
$$\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$$
уз ограничења $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$.

2. Наћи све бројеве са 31 012 015 цифара таквих да се изменом ма које цифре увек добија број који није дељив са 11.

3. На бесконачно великој табли записани су сви природни бројеви, сваки тачно по једанпут. У једном кораку дозвољено је избрисати коначно много бројева с табле, рецимо $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и уместо њих написати или број
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
или број
$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$
Доказати да је за ма који позитиван рационалан број q могуће након коначног броја описаних корака добити на табли број q.

4. Нека је C тачка на кружници k_1. Кружница k_2 са центром C сече k_1 у тачкама P и Q. Тангента из центра O кружнице k_1 на кружницу k_2 додирује k_2 у тачки N и сече k_1 у тачкама A и B, при чему важи $AN > BN$. Праве AC и PQ се секу у тачки K, а права NK сече k_2 у тачки $L \not\equiv N$. Доказати: $AL \perp PQ$.

5. Да ли постоји растући низ природних бројева $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такав да се сваки природан број $m \in \mathbb{N}$ може на јединствен начин представити у облику $m = a_i - a_j$ за неке $i, j \in \mathbb{N}$?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Први разред – Б категорија

1. Дати су скупови $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Одредити скупове $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

2. Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 висине у $\triangle ABC$, и нека је H његов ортоцентар. Ако је $\measuredangle A_1HC_1 = 116^\circ$ и $A_1HB_1 = 108^\circ$, одредити $\measuredangle BAC$.

3. Природан број n је потпун квадрат који се не завршава нулом. Брисањем последње две цифре броја n добијамо број који је такође потпун квадрат. Наћи највећу могућу вредност броја n.

4. Одредити колико има уређених парова природних бројева (x, y) таквих да важи $\text{НЗС}(x, y) = 6!$.

5. На табли је записано n природних бројева у низу. Доказати да је могуће обрисати неке од њих (могуће је и не обрисати ниједан), а потом испред сваког од преосталих бројева уписати знак „+“ или „−“ на такав начин да резултат добијеног израза буде дељив са $2^n - 3$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Други разред – Б категорија

1. Решити једначину
$$1-\frac{2b}{x-a}=\frac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax},$$
где су a и b фиксирани реални бројеви, а x је непозната.

2. Дат је $\triangle ABC$ у ком важи $\measuredangle BAC = 60^\circ$, $AB = 2x$ и $AC = 3x$ (где је x нека задата дужина). Да ли је могуће овакав троугао исећи на три дела и од њих саставити правилан шестоугао?

3. Нека су p, q и r прости бројеви за које важи $p+q+1=r^2$. Доказати да је број $pq+34$ сложен.

4. На крацима AB и AC једнакокраког $\triangle ABC$ одређене су тачке P и Q тако да је $\measuredangle PMB = \measuredangle QMC$, где је M средиште основице BC. Доказати да је $BQ = CP$.

5. На такмичењу из математике ученици раде 7 задатака, и на сваком од њих могу остварити 0, 1, 2, 3, 4 или 5 поена. Након прегледања испоставило се да постоји тачно 500 ученика који у скору имају 30 поена. Да ли међу ових 500 ученика морају постојати два који су на сваком задатку остварили подједнак број поена?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне бројеве t важи

$$\lfloor t \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3t \rfloor.$$

(За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x.)

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2.$$

3. На природном броју n спроводимо следећу операцију: последњу цифру декадног записа броја n множимо са 4 и то саберемо са бројем који се добија брисањем те последње цифре (на пример, на тај начин од броја 1345 добијамо број $4 \cdot 5 + 134 = 154$; специјално, уколико је број n једноцифрен, узимамо да нам након брисања те његове једине цифре остаје број 0, па оваквом операцијом од њега добијамо број $4n$). Овај поступак настављамо са сваким новодобијеним бројем, неограничен број пута. Претпоставимо да је у неком кораку добијен број 2015. Доказати да се међу свим бројевима који су били добијени у неком претходном моменту, као и међу свим бројевима који ће тек уследити, не налази ниједан прост број.

4. Нека су AA_1 и CC_1 тежишне дужи у $\triangle ABC$. На страници AC одабрана је произвољна тачка P, и кроз њу су повучене праве паралелне са AA_1 и CC_1. Ове праве секу странице BC и AB у тачкама E и F, редом. Доказати да дужи AA_1 и CC_1 деле дуж EF на три једнака дела.

5. Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за осам већа од најмање цифре?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. јануар 2015.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да важи

$$xyz = 2015(x + y + z).$$

Одредити минималну вредност израза $xy + yz + zx$.

2. Нека је $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_9}$ декадни запис броја n. Колико има непарних деветоцифрених бројева n дељивих са 375 код којих је $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_8$?

3. Нека је CD висина правоуглог $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$. Кружнице с центрима A и B и полупречником BD секу се у тачки на правој BC. Одредити однос $DB : BC$.

4. Доказати да од свих правих кружних ваљака константне запремине најмању површину има ваљак чија је висина једнака пречнику основице.

5. Доказати да постоји природан број $k > 2015$ такав да $2^{k-2015} \nmid k!$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.