

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Нови Сад, 5. април 2013.

Први дан

1. Дат је природан број k . Нека је $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ бијекција таква да за свака два цела броја i и j за које је $|i - j| \leq k$ важи $|f(i) - f(j)| \leq k$. Доказати да за све $i, j \in \mathbb{Z}$ важи

$$|f(i) - f(j)| = |i - j|. \quad (\text{Миљан Кнежевић})$$

2. Нека је

$$S_n = \left\{ \binom{n}{n}, \binom{2n}{n}, \binom{3n}{n}, \dots, \binom{n^2}{n} \right\}, \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

а) Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да S_n није потпун систем остатака по модулу n .

б) Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да S_n јесте потпун систем остатака по модулу n .

(Милош Милосављевић)

3. Нека су M , N и P средишта страница BC , AC и AB , редом, а O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC . Кружнице описане око троуглова BOC и MNP секу се у различитим тачкама X и Y унутар троугла ABC . Доказати да је

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle CAU. \quad (\text{Марко Ђукић})$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Нови Сад, 6. април 2013.

Други дан

4. Одредити све $n \in \mathbb{N}$ за које је могуће поделити скуп $\{1, 2, \dots, 3n\}$ на n дисјунктних трочланих подскупова облика $\{a, b, c\}$ у којима су $b - a$ и $c - b$ различити бројеви из скупа $\{n - 1, n, n + 1\}$.

(Душан Букић)

5. Нека су A' и B' подножја висина из темена A и B , редом, оштроуглог троугла ABC ($AC \neq BC$). Кружница k садржи тачке A' и B' и додирује страницу AB у тачки D . Ако троуглови ADA' и BDB' имају једнаке површине, доказати да је

$$\sphericalangle A'DB' = \sphericalangle ACB. \quad (\text{Милош Милосављевић})$$

6. Наћи највећу константу $K \in \mathbb{R}$ са следећим својством:
ако су $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ такви да за све $i, j, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i < j < k \leq 4$, важи $a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 \geq 2(a_i a_j + a_j a_k + a_k a_i)$, онда је

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq K(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4).$$

(Душан Букић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. За $k = 1$ тврђење је тривијално. Нека је зато $k > 2$. Интервалом дужине k зовемо скуп облика $\{x, x + 1, \dots, x + k\}$, $x \in \mathbb{Z}$. Два цела броја x и y ће бити узастопна ако и само ако постоје интервали I_1 и I_2 дужине k за које је $I_1 \cap I_2 = \{x, y\}$. Међутим, по услову задатка су $f(I_1)$ и $f(I_2)$ такође интервали дужине k , па како је $\{f(x), f(y)\} = f(I_1) \cap f(I_2)$, следи да су и $f(x)$ и $f(y)$ узастопни бројеви. Одавде је $|f(x + 1) - f(x)| = 1$ за $x \in \mathbb{Z}$. Коначно, користећи инјективност пресликавања, једноставном индукцијом по n добијамо да је $|f(x + n) - f(x)| = n$.

2. (а) Доказаћемо да $n = 2p$ задовољава услове, где је $p > 2$ прост број. Имамо

$$\binom{2kp}{2p} = k \prod_{i=1}^{p-1} \frac{2kp - i}{2p - i} \cdot (2k - 1) \prod_{i=1}^{p-1} \frac{2kp - p - i}{p - i} \equiv k(2k - 1) \pmod{p}.$$

Конкретно, одавде је $\binom{2kp}{2p}$ дељиво са p за $k \in \{\frac{p+1}{2}, p, 2p\}$, тј. S_{2p} има три елемента дељива са p , па није потпун систем остатака.

(б) Доказаћемо да $n = p^2$ задовољава услове, где је $p > 2$ прост број. Имамо $\binom{kp^2}{p^2} = \prod_{i=0}^{p^2-1} \frac{kp^2 - i}{p^2 - i} = k \prod_{j=1}^{p-1} \frac{kp^2 - jp}{jp} \cdot \prod_{p \nmid j} \frac{kp^2 - i}{p^2 - i}$, па је по модулу p^2

$$\binom{kp^2}{p^2} \equiv k \prod_{j=1}^{p-1} \frac{kp - j}{j} = k \prod_{j=1}^{p-1} \left(1 - \frac{kp}{j}\right) \equiv k - k^2 p \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j}.$$

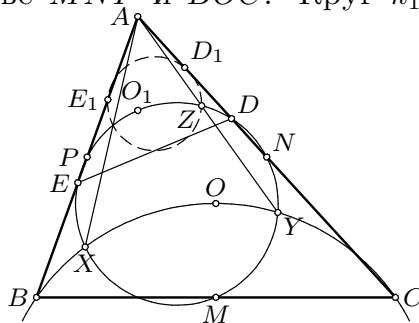
Како је $\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{p-j}\right) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{p}{j(p-j)} \equiv 0 \pmod{p}$, коначно следи да је $\binom{kp^2}{p^2} \equiv k \pmod{p^2}$.

Напомена. Има и других могућности за бројеве n : на пример, (а) $n = 8k + 6$ за $k \in \mathbb{N}$, односно (б) $n = p^k$ за прост број p .

3. Обележимо са k_1 и k_2 редом кругове MNP и BOC . Круг k_1 је Ојлеров круг у $\triangle ABC$ и пролази кроз подножја висина D, E из B, C и средиште O_1 дужи AH , где је H ортоцентар $\triangle ABC$.

Покажимо да друга пресечна тачка Z праве AU и круга k_1 лежи на Ојлеровом кругу k_3 троугла ADE . Сматраћемо да

је Z између A и Y ; доказ у другом случају је аналоган. Нека су D_1 и E_1 редом средишта дужи AD и AE . Како је $AU \cdot AZ = AD \cdot AN = AD_1 \cdot AC$, тачке Y, Z, C, D_1 су концикличне, па је $\sphericalangle AZD_1 = \sphericalangle ACY$.



Аналогно је $\sphericalangle AZE_1 = \sphericalangle ABY$, па је $\sphericalangle D_1ZE_1 = \sphericalangle AZD_1 + \sphericalangle AZE_1 = \sphericalangle ACY + \sphericalangle ABY = \sphericalangle BYC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAC$. Одавде следи да је Z на k_3 .

Пошто је O_1 центар описаног круга $\triangle ADE$, трансформација сличности која слика $\triangle ABC$ у $\triangle ADE$ такође слика k_1 у k_2 и k_2 у k_3 , па је слика тачке $X \in k_1 \cap k_2$ тачка $Z \in k_2 \cap k_3$. Према томе, $\sphericalangle BAX = \sphericalangle DAZ = \sphericalangle CAU$.

Напомена. Показује се да се при инверзији са центром A и квадрантом полупречника $\frac{1}{2}AB \cdot AC$ кругови k_1 и k_2 сликају један у други, па се и тачке X и Y сликају једна у другу, одакле такође следи тврђење.

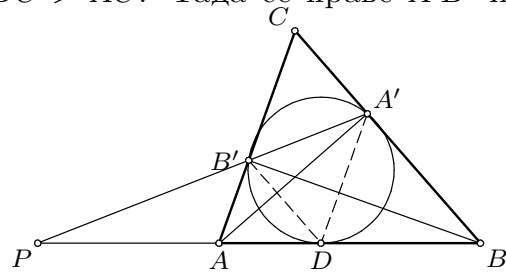
4. Тражена партиција скупа $\{1, 2, \dots, 3n\}$ одговара партицији темена правилног $3n$ -угла $P_1P_2 \dots P_{3n}$ на тројке $\{A_i, B_i, C_i\}$ такве да су углови сваког од троуглова $A_iB_iC_i$ једнаки $\frac{n-1}{3n}\pi$, $\frac{n}{3n}\pi$ и $\frac{n+1}{3n}\pi$. Погодним обележавањем темена $3n$ -угла можемо постићи да темена A_1, B_1, C_1 буду управо P_n, P_{2n-1}, P_{3n} . Другим речима, не смањујемо општост ако претпоставимо да се међу тројкама $\{a, b, c\}$ на које је скуп $\{1, 2, \dots, 3n\}$ подељен налази и тројка $\{n, 2n-1, 3n\}$.

Једна од преосталих $n-1$ тројки мора да садржи два броја из интервала $[2n, 3n-1]$, а то могу да буду једино $2n$ и $3n-1$. Једина тројка која садржи ове бројеве и не садржи n је $\{n-1, 2n, 3n-1\}$.

Све остале тројке садрже тачно по један број из сваког од интервала $[1, n-2]$, $[n+1, 2n-2]$ и $[2n+1, 3n-2]$. Пресликавањем $(a, b, c) \rightarrow (a, b-2, c-4)$ за $a < b < c$ добијамо одговарајуће растављање скупа $\{1, 2, \dots, 3(n-2)\}$ на тројке. Како за $n=1$ овакво растављање није могуће, једноставном индукцијом показујемо да оно није могуће ни за једно непарно n .

С друге стране, за парно $n=2m$ тројке $(2i-1, 2i+n, 2i+2n-1)$ и $(2i, 2i+n-1, 2i+2n)$ за $i=1, \dots, m$ задовољавају услове.

5. Нека је без смањења општости $BC > AC$. Тада се праве $A'B'$ и AB секу у тачки P , при чему је A између P и B . Из једнакости површина ADA' и BDB' следи да је $\frac{AD}{DB} = \frac{PB'}{PA'}$. С друге стране, важи и $PD^2 = PA' \cdot PB' = PA \cdot PB$, одакле је $\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{PD} = \frac{AD}{DB} = \frac{PB'}{PA'}$. Из последњих једнакости следи да је $B'D \parallel BC$ и $A'D \parallel AC$, и зато је $\sphericalangle A'DB' = \sphericalangle ACB$.



Друго решење. Како је $\sphericalangle CB'D = \alpha + \sphericalangle ADB' = \alpha + \sphericalangle B'A'D = \sphericalangle CA'D = x$, синусна теорема у $\triangle A'B'D$ и $\triangle AB'D$ нам даје $BD = \frac{BA' \sin x}{\sin(\beta+x)}$ и $AD = \frac{AB' \sin x}{\sin(\alpha+x)}$, па је $\frac{AD}{BD} = \frac{AB' \sin(\beta+x)}{BA' \sin(\alpha+x)} = \frac{\sin(\beta+x) \cos \alpha}{\sin(\alpha+x) \cos \beta}$. С

друге стране, из услова $[ADA'] = [BDB']$ добијамо $\frac{AD}{DB} = \frac{d(B',AB)}{d(A',AB)} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \beta \cos \beta}$, тј. $\frac{\sin(\beta+x)}{\sin(\alpha+x)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Одавде лако добијамо $\sphericalangle AB'D = x = \gamma$.

6. Нека је $\max\{a_1, a_2\} \leq a_3 \leq a_4$. Означимо $a_2 = \beta^2$ и $a_3 = \gamma^2$, $\beta, \gamma \geq 0$. Из услова задатка следи $a_1 \leq (\gamma - \beta)^2$ и $a_4 \geq (\gamma + \beta)^2$.

Претпоставимо да су обе ове неједнакости заправо једнакости. Тада имамо $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 3(\beta^4 + 4\beta^2\gamma^2 + \gamma^4)$ и $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 = 3(\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4)$. При том је $\gamma \leq 2\beta$, па је $\frac{\beta^4 + 4\beta^2\gamma^2 + \gamma^4}{\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4} = 1 + \frac{3\beta^2\gamma^2}{\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4} = 1 + \frac{3}{1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}} \geq \frac{11}{7}$, уз једнакост за $\gamma = 2\beta$. Према томе, у овом случају је $K \geq \frac{11}{7}$, а једнакост се достиже за $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = 1 : 1 : 4 : 9$.

Покажимо још да можемо да узмемо $a_1 = (\gamma - \beta)^2$ и $a_4 = (\gamma + \beta)^2$. Посматрајмо израз

$$F = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - \frac{11}{7}(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4).$$

За фиксирано a_2, a_3, a_4 , F је опадајућа функција по a_1 за $a_1 < \frac{11}{14}(a_2 + a_3 + a_4)$, при чему је $\frac{11}{14}(a_2 + a_3 + a_4) \geq \frac{11}{14}(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2) \geq (\gamma - \beta)^2 \geq a_1$, па се F не повећава ако a_1 заменимо са $(\gamma - \beta)^2$. Сада можемо да ставимо без смањења општости да је $a_1 \leq a_2$, тј. $\beta \leq \gamma \leq 2\beta$. Слично као горе, за фиксирано a_1, a_2, a_3 , F је растућа функција по a_4 за $a_4 > \frac{11}{14}(a_1 + a_2 + a_3)$, и при том је $\frac{11}{14}(a_1 + a_2 + a_3) \leq \frac{11}{14}(\beta^2 + \gamma^2 + (\gamma - \beta)^2) \leq (\gamma + \beta)^2 \leq a_4$, дакле F се не повећава ако a_4 заменимо са $(\gamma + \beta)^2$.