R E Š E NJ A

Klasifikacionog ispita iz Matematike za 2014. godinu:

1. Uprostiti izraz $I = \dfrac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2}$.

$$I = \frac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-xy-3xy+3y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y)-3y(x-y)}{(x-y)(x+y)} =$$
$$= \frac{(x-y)(x-3y)}{(x-y)(x+y)} = \boxed{\frac{x-3y}{x+y}}, \text{ za } x \neq \pm y.$$

2. Rastaviti na faktore polinom $P(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

$$P(x) = x^3(x^2-1) - (x^2-1) = (x^2-1)(x^3-1)$$
$$= (x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1) = \boxed{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)}.$$

3. Uprostiti izraz $I = \dfrac{1+x+(1-x)^{-1}}{1+(1-x^2)^{-1}}$.

$$I = \frac{1+x+(1-x)^{-1}}{1+(1-x^2)^{-1}} = \frac{1+x+\frac{1}{1-x}}{1+\frac{1}{1-x^2}} = \frac{\frac{1-x+x-x^2+1}{1-x}}{\frac{1-x^2+1}{(1-x)(1+x)}} =$$
$$= \frac{(2-x^2)(1-x)(1+x)}{(2-x^2)(1-x)} = \boxed{1+x}, \text{ za } x \neq \pm 1,\ x \neq \pm\sqrt{2}.$$

4. Rešiti jednačinu $\dfrac{9x-8}{7} = 7 - \dfrac{5x+7}{9}$.

Ako jednačinu pomnožimo sa 63 dobijamo

$$9(9x-8) = 7 \cdot 63 - 7(5x+7) \iff 81x - 72 = 441 - 35x - 49 \iff$$
$$116x = 464 \iff \boxed{x=4}.$$

5. Rešiti jednačinu $\dfrac{6x-1}{2+x} = 3$.

Za $x \neq -2$ imamo da je $6x - 1 = 6 + 3x \iff 3x = 7 \iff \boxed{x = \dfrac{7}{3}}$.

6. Rešiti sistem jednačina $3x + 5y = 1 \ \wedge\ 3x - 2y = 8$.

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, dobijamo

$$-3x - 5y = -1 \ \wedge\ 3x - 2y = 8 \iff -7y = 7 \ \wedge\ 3x - 2y = 8$$
$$\iff y = -1 \ \wedge\ 3x + 2 = 8 \iff \boxed{x=2} \wedge \boxed{y=-1}.$$

7. Rešiti jednačinu $(x-1)^2-4=0$.

$(x-1)^2-4=0 \iff (x-1)^2-2^2=0 \iff (x-1-2)(x-1+2)=0 \iff (x-3)(x+1)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \iff \boxed{x=3} \vee \boxed{x=-1}$.

8. Za koju vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$ kvadratna jednačina $x^2+6x+m=0$ ima realna rešenja?

Jednačina ima realna rešenja ako i samo ako je $D=b^2-4ac \geq 0$, tj. ako je $D=6^2-4\cdot 1\cdot m \geq 0 \iff 36-4m \geq 0 \iff \boxed{m \leq 9}$.

9. Rešiti nejednačinu $(x-2)^2-9>0$.

$$(x-2)^2-3^2=(x+1)(x-5)>0 \iff$$
$$[(x+1<0 \wedge x-5<0) \vee (x+1>0 \wedge x-5>0)] \iff$$
$$[x<-1 \vee x>5] \iff \boxed{x \in (-\infty,-1)\cup(5,+\infty)} .$$

10. Rešiti jednačinu $(2014)^{x^2-5x+4}=1$.

$(2014)^{x^2-5x+4}=1 \iff (2014)^{x^2-5x+4}=(2014)^0 \iff x^2-5x+4=0 \iff \boxed{x=1} \vee \boxed{x=4}$.

11. Rešiti jednačinu $\log_3(2x+3)=2$.

Za $2x+3>0 \iff x>-\frac{3}{2}$ je

$$\log_3(2x+3)=2 \iff 2x+3=3^2 \iff 2x=6 \iff \boxed{x=3} .$$

12. Izračunati vrednost izraza $I=\log_6 2+\log_6 3$.

$$I=\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\cdot 3)=\log_6 6=\boxed{1} .$$

13. Rešiti nejednačinu $\dfrac{3-x}{4-x}>1$.

Za $x \neq 4$, je $\dfrac{3-x}{4-x}>1 \iff \dfrac{3-x}{4-x}-1>0 \iff \dfrac{3-x-4+x}{4-x}>0 \iff \dfrac{-1}{4-x}>0$

$$\iff 4-x<0 \iff x>4 \iff \boxed{x\in(4,+\infty)} .$$

14. Rešiti jednačinu $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \iff 2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0 \iff (2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0.$
Smenom $2^x=t$ dobijamo: $t^2-5t+4=0 \iff t=1 \vee t=4$, pa je:
$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \iff 2^x=1 \vee 2^x=4 \iff \boxed{x=0} \vee \boxed{x=2}$.

15. Napisati kanonski oblik parabole $y=x^2-4x+3$.

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=1\cdot\left(x+\frac{-4}{2\cdot 1}\right)^2+\frac{4\cdot 1\cdot 3-(-4)^2}{4\cdot 1}=\boxed{(x-2)^2-1}.$$

Ispitivač: Prof. dr Žarko Popović