**ВИСОКА ЖЕЛЕЗНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА У БЕОГРАДУ**

Презиме, име и потпис кандидата ..........................................................................................................

Број личне карте и место издавања .................................................... Датум рада: 6. септембар 2011.

Број под којим је кандидат пријављен ............................................... Школска година: 2011/2012.

Студијски програм ................................................................................ Запослен у .........................................................

## Пријемни испит из предмета: **МАТЕМАТИКА**

**1.** Израчунати вредност израза $S=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}:\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$. **Решење.** $S=\sqrt[12]{ab}$.

$$S=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}:\sqrt[4]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}}{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}=\frac{\frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{b}}}{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}}=\frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{b}}\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[6]{b}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{ab}$$

**2.** Решити неједначину $\frac{x^2+1}{x-3}<-1$. **Решење.** $x\in(-\infty,-2)\cup(1,3)$.

$$\frac{x^2+1}{x-3}<-1\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x-3}+1<0\Leftrightarrow\frac{x^2+1+x-3}{x-3}<0\Leftrightarrow\frac{x^2+x-2}{x-3}<0\Leftrightarrow\frac{x^2-x+2x-2}{x-3}<0\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}<0$$

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}<0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

Одавде је $x\in(-\infty,-2)\cup(1,3)$

**3.** Решити једначину $\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x-2)^2-(x-4)^2}=0$. **Решење.** $x=-3, x=-1$.

$$\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x-2)^2-(x-4)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)-9(x+1)}{((x-2)-(x-4))((x-2)+(x-4))}=0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-9)(x+1)}{2(2x-6)}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{4(x-3)}=0$$

За $x\neq 3$, добијамо $(x+3)(x+1)=0$, одакле је $x=-3, x=-1$.

**4.** Решити једначину $5^x-5^{3-x}=20$. **Решење.** $x=2$.

$$5^x-5^{3-x}=20 \Leftrightarrow 5^x-\frac{5^3}{5^x}=20 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2-5^3=20\cdot 5^x.$$

Смена $t=5^x$, доводи до квадратне једначине

$t^2-20t-125=0.$ Њена решења су

$$t_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{20^2-4\cdot(-125)}}{2}=\frac{20\pm 30}{2},$$

тј. $t_1=-5$ и $t_2=25$.

Како је $t=5^x>0$ једино решење је $5^x=25$ одакле је $x=2$.

**5.** Решити једначину $\log_{10}\sqrt{x-8}-\log_{10}(44-2x)+1=0$. **Решење.** $x=12$.

Домени функција су $D=\{x: x-8>0, 44-2x>0\}=(8,22)$.

$$\log_{10}(x-8)^{\frac{1}{2}}-\log_{10}(44-2x)=-1 \Leftrightarrow \log_{10}(x-8)^{\frac{1}{2}}(44-2x)^{-1}=-1 \Leftrightarrow (x-8)^{\frac{1}{2}}(44-2x)^{-1}=10^{-1}.$$

Сада је

$$(x-8)(44-2x)^{-2}=10^{-2} \Leftrightarrow (x-8)^{-1}(44-2x)^2=10^2 \Leftrightarrow 4(22-x)^2=100(x-8)$$

$$(22-x)^2=25(x-8) \Leftrightarrow 484-44x+x^2=25x-200 \Leftrightarrow x^2-69x+684=0 \Leftrightarrow x=12, x=57.$$

Решење $x=57$ не припада интервалу $(8,22)$. Дакле, једино решење је $x=12$.

**6.** Ако је $\sin x=\dfrac{4}{5}$, $\sin y=\dfrac{7}{25}$, за $0<x,y<\dfrac{\pi}{2}$, одредити $B=\cos(x+y)$. **Решење.** $B=\dfrac{44}{125}$**.**

Из услова имамо

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$
$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}.$$

Сада је

$$B=\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25}-\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25}=\frac{72-28}{125}.$$
$$B=\frac{44}{125}.$$

**7.** Одредити страницу ромба ако је једна дијагонала 2 пута дужа од друге, а површина ромба је $P=16$.

**Решење.** $a=2\sqrt{5}$ **.**

Површина ромба се рачуна преко дијагонала као

$$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\ .$$

Из услова задатка имамо

$$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=16,\quad d_1=2d_2.$$

Сада је $d_2^2=16$, тј. $d_1=8,\quad d_2=4$.

Како дијагонале граде прав угао, имамо

$$a=\ \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{1^2+2^2}\ ,$$

одакле је $a=2\sqrt{5}$ .

**8.** На правој $p:\ 4x+3y=12$ наћи тачку подједнако удаљену од тачака A(-1,-2) и B(1,4).

**Решење.** $Q(3,0)$ **.**

Средина $S$ дужи $AB$ има координате $x_S=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{(-1)+1}{2}=0,\quad y_S=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{(-2)+4}{2}=1$,

тј. то је тачка $S(0,1)$. Права $AB$ има једначину

$y-y_A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$ одакле је $y-(-2)=\dfrac{4-(-2)}{1-(-1)}(x-(-1))$, тј. $y=3x+1$.

Скуп тачака подједнако удаљених од $A$ и $B$ је симетрала дужи $AB$. Она пролази кроз $S(0,1)$ и има коефицијент правца $k=-\dfrac{1}{3}$. Њена једначина гласи $y-y_s=k(x-x_s)$, тј $y-1=-\dfrac{1}{3}(x-0)$. Тачка $Q$ на правој $p$ подједнако удаљена од $A$ и $B$ припада и симетрали, тако да добијамо систем

$\begin{cases}x+3y=3,\\4x+3y=12,\end{cases}$ чије решење је $Q(3,0)$.

**9.** Одредити ивицу $a$ коцке која је уписана у праву купу висине $H$=6 и полупречника основе $R$=4 тако да четири темена леже на изводницама купе, а четири на основи.

**Решење.** $a = 12(3\sqrt{2} - 4)$.

Нека је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ уписана у праву купу (купа код које је оса нормална на основу) чији је врх $V$ и подножје висине $S$. Уочимо раван која садржи $V, S, A, C, A_1, C_1$. Она сече основу у $E$ и $F$. Применом теореме о сличности имамо

$$\frac{EA}{ES} = \frac{AA_1}{VS} \quad \Rightarrow \quad \frac{R - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{R} = \frac{a}{H} \quad \Rightarrow \quad h\left(R - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = Ra \quad \Rightarrow \quad a = \frac{HR}{R + H\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \ .$$

Конкретно, у овом задатку је $a = \dfrac{6 \cdot 4}{4 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{24}{4 + 3\sqrt{2}}$, тј. $a = 12\left(3\sqrt{2} - 4\right)$.

**10.** Пројектовањем железничке пруге између места A и B предвиђен је тунел. Изабрана је тачка C тако да су из ње видљива и доступна оба места. Мерењем је добијено да је $b = CA = 100m$, $a = CB = 200m$ и угао $\gamma = \angle ACB = 60^0$. Колика је дужина тунела $c = AB$?

**Решење.** $c = 100\sqrt{3}m \approx 173m$.

Применом косинусне теореме, добија се

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 100^2 + 200^2 - 2 \cdot 100 \cdot 200b\cos 60^0 = 10000 + 40000 - 40000\frac{1}{2},$$

тј.

$$c^2 = 30000,$$

одакле је

$$c = 100\sqrt{3}m \approx 173m \ .$$