УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКУ
И ИНФОРМАТИКУ

Задаци за припрему пријемног испита

Крагујевац, 2013. године

1. Дат је израз $I=\left(\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}+\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}-\dfrac{1}{1-\frac{b}{a}}\right):\dfrac{1-\frac{a-3b}{a+b}}{\frac{3a+b}{a-b}-3}$.

   - За које вредности променљивих a и b је дефинисан израз I?
   - Доказати да израз I има исту вредност за све вредности променљивих a и b за које је дефинисан (тј. доказати да израз не зависи од a и b).

   Решење: $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$, $a-b\neq 0$; $I=1$.

2. За $a=0,025$ одредити вредност израза
$$A=\left(\frac{a+a^{-1}-1}{a+a^{-2}}-\frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}+2}\right):\frac{a^{-1}}{1+a^{-1}}.$$

   Решење: $A=1$.

3. Израчунати вредност израза $I=\dfrac{1-\frac{1}{(m+x)^2}}{\left(1-\frac{1}{m+x}\right)^2}\cdot\left(1-\dfrac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right)$, ако је $x=\dfrac{1}{m-1}$, $m\neq 1$.

   Решење: $I=\dfrac{m^3}{2(m-1)}$.

4. Одредити вредност израза $R=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\dfrac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$, за $a=0,02$, $b=-11,05$ и $c=1,07$.

   Решење: $0,1$.

5. Израчунати вредност израза
$$\frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-2}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-2},\quad a,b\geqslant 0,\ a\neq b.$$

   Решење: 2.

6. Израчунати вредност израза $\dfrac{a\,b^{-2}\left(a^{-1}b^{2}\right)^{4}\left(ab^{-1}\right)^{2}}{a^{-2}\,b\left(a^{2}b^{-1}\right)^{3}a^{-1}\,b}$, ако је $a = 10^{-3}$ и $b = 10^{-2}$.

Решење: 100.

7. Израчунати вредност израза

$$\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{(a^{2}-ab)^{2/3}} : \frac{a^{-2/3}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$$

за $a = 0,01$ и $b = \dfrac{2}{25}$.

Решење: $0,0073$.

8. Упростити израз $\left(\dfrac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \dfrac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$, $a \neq -b$, $ab \neq 0$.

Решење: $2b$.

9. Израчунати вредност израза $\left(1-\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right)\cdot\left(1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right)^{-1}$ за $x = 0,0001$.

Решење: $0,0001$.

10. Решити једначину $|x+2|-|x-2| = 4$.

Решење: $x \in [2, +\infty)$.

11. Решити следеће једначине:

(а) $||x|-2| = 5$;

(б) $||2x-3|-x+1| = 4x-1$.

Решење: (а) $x \in \{7, -7\}$; (б) $x = \dfrac{5}{7}$.

12. Одредити производ свих решења једначине $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}\right| = \dfrac{5}{7}$.

Решење: $-\dfrac{17}{6}$.

13. Решити једначину $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}} = 5$.

Решење: $x \in [1, 26]$.

14. У скупу реалних бројева, за $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, решити једначину

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Решење. Решење је свако $x \in \mathbb{R}$.

15. Решити систем неједначина $1 < \dfrac{3x+10}{x+7} < 2$.

Решење: $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 4\right)$.

16. Решити неједначину $|x-1| + |x+2| + 3x + 1 \leqslant 0$.

Решење: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right]$.

17. Решити неједначину $\left|\dfrac{2x-4}{x+3}\right| + x - 2 \geqslant 0$.

Решење: $x \in [-5, -3) \cup (-3, -1] \cup [2, +\infty)$.

18. Решити једначину $\dfrac{x^2+x-5}{x} + \dfrac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$.

Решење: $x_1 = -1+\sqrt{6},\ x_2 = -1-\sqrt{6},\ x_3 = 1,\ x_4 = -5$.

19. Решити једначину $3\Big(x^2+\dfrac{1}{x^2}\Big)-7\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)=0$ у скупу комплексних бројева.

Решење: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},$

$x_3=\dfrac{-1+2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{3},\ x_4=\dfrac{-1-2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{3}.$

20. Решити једначину $\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=x^2+2x+4$ у скупу комплексних бројева.

Решење: $x_1=x_2=-1,\ \ x_3=-1+2\,\mathrm{i},\ \ x_4=-1-2\,\mathrm{i}.$

21. Решити једначину $|x^2-9|+|x^2-4|=5.$

Решење: $x\in[-3,-2]\cup[2,3].$

22. Одредити параметар k тако да функција $y=(3k+6)x+k-7$ буде растућа и да њен график сече негативан део y–осе.

Решење: $-2<k<7.$

23. Одредити параметар k тако да функција $y=(4k-1)x-k+3$ буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y–осе.

Решење: $k<\dfrac{1}{4}.$

24. Збир два броја је 89. Ако већи број поделимо мањим, добија се количник 3 и остатак 5. Који су то бројеви?

Решење: 21 и 68.

25. Збир цифара двоцифреног броја је 8. Ако се цифрама замене места, добијени број ће за 10 бити већи од двоструког првог броја. Који је то број?

Решење: 26.

26. Ако се двоцифрени број, чији је збир цифара 5, увећа за 9, добиће се број састављен од истих цифара, али у обрнутом редоследу. Који је то број?

Решење: 23.

27. Одредити вредност параметра a тако да једначине $x^2 - ax + 1 = 0$, $x^2 - x + a = 0$ имају тачно једно заједничко решење.

Решење: $a = -2$.

28. Решити неједначину $\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2} < \dfrac{1}{2}$.

Решење: $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

29. Решити неједначину $\dfrac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$.

Решење: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 2) \cup (3, +\infty)$.

30. Решити неједначину $x^2 + x + \dfrac{3}{x^2 + x + 1} \leqslant 3$.

Решење: $x \in [-2, -1] \cup [0, 1]$.

31. Решити неједначину $|x^2 - 2x - 3| < x + 1$.

Решење: $x \in (2, 4)$.

32. Решити систем неједначина $1 < \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} < 3$.

Решење: $x \in \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

33. Решити систем квадратних једначина:

$$x^2 + y^2 + x + y = 8,$$
$$x^2 + y^2 + xy = 7.$$

Решење: $(x, y) \in \big\{(1, 2), (2, 1), (1, -3), (-3, 1)\big\}$.

34. Решити систем једначина:

$$x + \sqrt{xy} + y = 14,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 84.$$

Решење: $(x, y) \in \{(2, 8), (8, 2)\}$.

35. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 - 2x + 5 = 0$, одредити вредност израза $\dfrac{{x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2}{{x_1}^3 + {x_2}^3}$.

Решење: $\dfrac{1}{22}$.

36. Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 - 4x + 3(k-1) = 0$. Одредити вредност реалног параметра k тако да је $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -4$.

Решење: $k = \dfrac{2}{3}$.

37. Одредити вредност реалног параметра m тако да су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$, за која важи $x_1 = 2x_2$.

Решење: $m_1 = 10,\ m_2 = 7$.

38. У једначини $x^2 + (k+3)x + k + 21 = 0$ одредити k тако да буде испуњен услов $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} < 1$.

Решење: $(-\infty, -21) \cup (-9, 6)$.

39. У квадратној једначини $2x^2 - 2(m-3)x + 2m^2 - 17 = 0$ одредити вредност параметра m, тако да за корене дате квадратне једначине важи $x_1^2 + x_2^2 = 19$.

Решење: $m_1 = -7,\ m_2 = 1$.

40. Решити једначину $\sqrt{6-x-x^2}=x+1$.

Решење: $x=1$.

41. Решити једначину $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$.

Решење: $x=8$.

42. Решити једначину $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.

Решење: $x=20$.

43. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$.

Решење: $x\in(-\infty,-2]\cup\left[5,\dfrac{74}{13}\right)$.

44. Решити једначину $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$.

Решење: $x=11$.

45. Решити једначину $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-7}=5$.

Решење. Једначина нема решења.

46. Решити једначину $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$.

Решење: $x=-\dfrac{47}{24}$.

47. Решити једначину $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$.

Решење: $x=2$.

48. Решити једначину $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x-1}=1$.

Решење. Једначина нема решења.

49. Решити једначину $\sqrt{4+x\sqrt{x^2-7}}=4$.

Решење: $x=4$.

50. Решити неједначину $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

Решење: $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$.

51. Решити неједначину $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} < 4$.

Решење: $x \in \left[5, 86\right)$.

52. Решити неједначину $\sqrt{-x^2+x+6} + x - 1 > 0$.

Решење: $x \in \left(-1, 3\right]$.

53. Решити неједначину $\sqrt{1-4x^2} \geqslant 1 - 3x$.

Решење: $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

54. Решити неједначину $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x-2}} < 2$.

Решење: $x \in (3, 5)$.

55. Решити једначину $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.

Решење: $x = 4$.

56. Одредити збир свих реалних решења једначине $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Решење: $\dfrac{1}{2}$ $\quad (x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2})$.

57. Решити неједначину $\dfrac{1}{2^{2x}+3} \geqslant \dfrac{1}{2^{x+2}-1}$.

Решење: $x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}$.

58. Решити неједначину $2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 3 \cdot 2^{2+2x-x^2} + 8 \leqslant 0$.

Решење: $x \in [0, 2]$.

59. За једначину $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ одредити производ свих њених решења.

Решење: $-4 \quad (x_1 = 2, x_2 = -2)$.

60. Решити једначину $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 7^{x+1} - 7^{x-1}$.

Решење: $x = 2$.

61. Решити једначину $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}} = \sqrt[4]{3^7}$.

Решење: $x_1 = 10,\ x_2 = -\dfrac{14}{3}$.

62. Решити једначину $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

Решење: $x = \dfrac{3}{2}$.

63. Решити једначину $20^x - 6 \cdot 5^x + 10^x = 0$.

Решење: $x = 1$.

64. Решити једначину $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

Решење: $x_1 = 11,\ x_2 = 3$.

65. Решити неједначину $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Решење: $x > 0$.

66. Решити једначину $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_9 \log_9 \dfrac{x}{3}$.

Решење: $x = 9$.

67. Решити једначину $x^{\log_{10} x} = \dfrac{x^3}{100}$.

Решење: $x \in \{10, 100\}$.

68. Решити једначину $\log_4\big(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))\big)=0,5$.

Решење: $x=3$.

69. Решити једначину $5^{1+\log_4 x}+5^{-1+\log_{0,25} x}=\dfrac{26}{5}$.

Решење: $x_1=1,\ x_2=\dfrac{1}{16}$.

70. Ако је $\log_{10} 5=a$, одредити $\log_{40} 8$.

Решење: $\dfrac{3\,(1-a)}{3-2a}$.

71. Решити неједначину $\log_x \dfrac{5x-2}{x^2+2}>0$.

Решење: $x\in\Big(\dfrac{2}{5},1\Big)\cup(1,4)$.

72. Решити неједначину $\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\geqslant 5$.

Решење: $x\in\big(-\infty,0\big]\cup\Big[\dfrac{63}{32},2\Big)$.

73. Решити неједначину $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0$.

Решење: $x\in(4,6)$.

74. Ако је $\log_8 3=p$ и $\log_3 5=q$, одредити $\log_{10}5+\log_{10}6$.

Решење: $\dfrac{3pq+3p+1}{3pq+1}$.

75. Упоредити бројеве $2^{\sqrt{\log_2 2011}}$ и $2011^{\sqrt{\log_{2011} 2}}$ по величини.

Решење. Једнаки су.

76. Одредити производ реалних решења једначине

$$\left(\log_3 \frac{3}{x}\right) \cdot (\log_2 x) - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

Решење: $\dfrac{\sqrt{3}}{8} \quad (x_1 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{8})$.

77. Решити неједначину $\log\left(5^x + x - 20\right) > x - x\log 2$.

Решење: $x > 20$.

78. Решити неједначину $\log_{x-3}\left(x^2 - 4x + 3\right) < 0$.

Решење: $x \in (2 + \sqrt{2}, 4)$.

79. Колико решења у интервалу $(0, 2\pi)$ има једначина $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$?

Решење. Једно $(x = \pi)$.

80. Израчунати $\sin 75^\circ$.

Решење: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.

81. Трансформисати израз $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Решење: $\dfrac{3 + \cos 4x}{4}$.

82. Решити једначину $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3}{4}$.

Решење: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

83. Решити једначину $\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Решење: $x = 0$.

84. Нека је $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ и $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Израчунати $\alpha + 2\beta$.

Решење: $\frac{\pi}{4}$.

85. Израчунати вредност израза $\frac{\sin\alpha + \sin(\alpha - 2\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha - 2\beta)}$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{3}$.

Решење: 1.

86. Решити неједначину $4\cos^2 x - 3 > 0$.

Решење: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

87. Решити неједначину $\sqrt{5 - 2\sin\frac{x}{6}} \geqslant 6\sin\frac{x}{6} - 1$.

Решење: $x \in [5\pi + 12k\pi, 13\pi + 12k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

88. Израчунати дужине друге две странице троугла ако је дужина једне странице $c = 8\,\mathrm{cm}$, $c > a > b$, површина троугла је $P = 8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ и ако је разлика између средњег по величини и најмањег угла једнака разлици између највећег и средњег угла.

Решење: $a = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$.

89. Дужина странице AB паралелограма $ABCD$ је $3\,\mathrm{cm}$, унутрашњи угао 60°, а његова површина $12\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати обим тог паралелограма.

Решење: $\frac{2}{3}(9 + 8\sqrt{3})$.

90. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{200} - 3x^{199} - 1$ полиномом $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Решење: $x - 4$.

91. Неки полином при дељењу са $x-1$ даје остатак 2, а при дељењу са $x+2$ даје остатак -7. Одредити остатак при дељењу овог полинома са x^2+x-2.

Решење: $3x-1$.

92. У скупу природних бројева решити неједначине:

(а) $\binom{13}{x} < \binom{13}{x+2}$;

(б) $\binom{18}{x-2} > \binom{18}{x}$.

Решење. (а) $x \in \{1,2,3,4,5\}$; (б) $x \in \{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

93. Одредити члан у развоју бинома $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, $a>0$, $b>0$, који садржи a и b са истим степеном.

Решење: $\binom{21}{9}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$

94. Одредити онај члан који у развоју бинома $\left(\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13}$ не садржи x.

Решење: $\binom{13}{5}a^3$.

95. У аритметичком низу први члан је 1, а збир првих пет чланова једнак је четвртини збира наредних пет чланова. Одредити тај низ.

Решење: $1,-2,-5,-8,\ldots$.

96. Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним позицијама је 85, а збир чланова на парним позицијама је 170. Одредити количник те прогресије.

Решење: 2.

97. Колико чланова има геометријски низ, ако је збир првог и петог члана 51, збир другог и шетог 102, а збир свих чланова 3069?

Решење: 10.

98. Одредити четири броја тако да прва три одређују геометријски низ, а последња три аритметички низ и при томе је збир првог и последњег члана 14, а збир преостала два је 12.

Решење: $2, 4, 8, 12$ или $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$.

99. Први члан аритметичког низа је 24. Написати првих десет чланова тог низа, ако су први, пети и једанаести члан узастопни чланови геометријске прогресије.

Решење: $24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51$,
или $24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24$.

100. Три броја чији је збир 93 су узастопни чланови геометријског низа. Исти бројеви се могу узети за први, други и седми члан аритметичког низа низа. Одредити те чланове.

Решење: $3, 15, 75$ или $31, 31, 31$.

101. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да сви заједно формирају аритметички низ. Колики је збир ових 17 бројева?

Решење: 374.

102. Збир три броја, који чине растућу геометријску прогресију, износи 21, а збир њихових реципрочних вредности је $\frac{7}{12}$. Који су то бројеви?

Решење: 3, 6 и 12.

103. Број 195 се може представити као збир три цела броја која образују геометријски низ код кога је први члан за 120 мањи од трећег. Одредити те бројеве.

Решење: 15, 45 и 135 или 125, -175 и 245.

104. У аритметичком и геометријском низу први, други и четврти члан су једнаки, а трећи члан аритметичког низа је за 18 већи од трећег члана геометријског низа. Одредити оба низа.

Решење. Аритметички низ: $-2, 4, 10, 16, \ldots$;
геометријски низ: -2,4, $-8, 16, \ldots$.

105. Збир чланова бесконачне опадајуће геометријске прогресије је $\frac{3}{2}$, а збир квадрата чланова исте прогресије је $\frac{1}{8}$. Која је то прогресија?

Решење. Први члан је $\frac{3}{19}$, а количник $\frac{17}{19}$.

106. Страница квадрата $ABCD$ је $a = 12\,\mathrm{cm}$. Израчунати дужину полупречника круга уписаног у троугао AMN, где је M средиште странице BC, а N средиште странице CD.

Решење: $(2\sqrt{5} - \sqrt{2})\,\mathrm{cm}$.

107. Израчунати површину једнакокраког трапеза, ако је његова средња линија дужине m, а дијагонале су му узајамно нормалне.

Решење: m^2.

108. Центар уписаног круга једнакокраког троугла дели висину која одговара основици на одсечке дужина $5\,\mathrm{cm}$ и $3\,\mathrm{cm}$. Израчунати дужине страница тог троугла.

Решење: $12\,\mathrm{cm}$, $10\,\mathrm{cm}$.

109. На хипотенузи BC правоуглог троугла ABC дате су тачке D и E, такве да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати, у радијанима, угао DAE.

Решење: $\frac{\pi}{4}$.

110. Тежишне дужи AD и CE троугла ABC секу се у тачки T. Средиште дужи AE је тачка F. Одредити однос површина троуглова TFE и ABC?

Решење: $1 : 12$.

111. Одредити дужине катета (у cm) правоуглог троугла, ако је дужина полупречника његовог уписаног круга $r = 2\,\mathrm{cm}$ и дужина полупречника његовог описаног круга $R = 5\,\mathrm{cm}$.

Решење: $6\,\mathrm{cm}$ и $8\,\mathrm{cm}$.

112. У троуглу су дате дужине две странице $a = 15$, $b = 13$ и дужина полупречника описаног круга $R = 8,125$. Израчунати дужину треће странице тог троугла.

Решење: 14 или 4.

113. У троуглу ABC угао код темена A је два пута већи од угла код темена B, а дужине страница AC и AB су $AC = 2$, $AB = 3$. Израчунати дужину странице BC.

Решење: $\sqrt{10}$.

114. Израчунати дужине дијагонале и крака једнакокраког трапеза чије су основице дужине $a = 20$ и $b = 12$, ако центар круга описаног око трапеза лежи на већој основици.

Решење: $8\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$.

115. На параболи $y = x^2$ одредити тачку која је најближа правој $y = 2x-4$.

Решење: $(1,1)$.

116. Од свих тачака хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 72$ тачка P је најближа правој $3x + 2y + 1 = 0$. Одредити збир координата тачке P.

Решење: -3; $P(-6,3)$.

117. Одредити једначину праве у равни која садржи координатни почетак и тачку $(-2,1)$.

Решење: $y = -\dfrac{x}{2}$.

118. Одредити тачку $B(x, y)$ симетричну тачки $A(1,3)$ у односу на праву $x + 2y - 2 = 0$.

Решење: $B(-1,-1)$.

119. Одредити једначину елипсе са центром у тачки $S(-2,1)$ која пролази кроз тачке $A(0,4)$ и $B(4,2)$ и чије су осе паралелне координатним осама.

Решење: $\dfrac{(x+2)^2}{40} + \dfrac{(y-1)^2}{10} = 1$.

120. Израчунати дужину нормале која је повучена из тачке $M(3,2)$ на праву $3x - 4y + 15 = 0$.

Решење: $\dfrac{16}{5}$.

121. Темена четвороугла имају координате $A(3,4)$, $B(2,0)$, $C(-2,-1)$, $D(-2,2)$. Одредити координате пресека дијагонала овог четвороугла.

Решење: $(0,1)$.

122. Одредити за које вредности реалног параметра a права $y = 2x + a$ сече кружницу дату једначином $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 10$.

Решење: $a \in \left(4 - 5\sqrt{3}, 4 + 5\sqrt{3}\right)$.

123. Одредити једначину праве која је нормална на праву $2x - y - 1 = 0$ и пролази кроз тачку $A(2,3)$.

Решење: $x + 2y - 8 = 0$.

124. Дата је елипса $mx^2 + 5y^2 = 20$ и њена тангента $3x + 10y - 25 = 0$. Одредити координате додирне тачке.

Решење: $\left(3, \dfrac{8}{5}\right)$.

125. Одредити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ и пролази кроз тачку $M(1, -4)$.

Решење: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25.$

126. Дата је једначина $x^2 - 2x + y^2 - 6y = d$.

(а) Одредити за које вредности реалног параметра d ова једначина представља једначину кружнице.

(б) Одредити d тако да права која пролази кроз тачке $A(-1, 2)$ и $B(4, 1)$ не сече кружницу.

Решење. (а) $d > -10$; (б) $-10 < d < -\dfrac{211}{26}$.

127. Осни пресек праве купе је троугао који има један угао од 120°. У купу је уписан једнакостраничан ваљак (висина ваљка је једнака пречнику основе ваљка) полупречника r, тако да му једна база лежи у равни базе купе, а друга додирује целим обимом омотач купе. Израчунати површину купе.

Решење: $P = \dfrac{\pi r^2}{3}(63 + 38\sqrt{3})$.

128. Око лопте полупречника r описани су једнакостраничан ваљак и једнакостранична купа (пресек ваљка, односно купе, са равни која садржи висину ваљка, тј. купе, представља квадрат и једнакостраничан троугао, респективно). Израчунати однос површина и запремина ова три тела.

Решење: $P_\ell : P_v : P_k = 4 : 6 : 9 = V_\ell : V_v : V_k$.

129. Прав ваљак је уписан у лопту полупречника R. Израчунати запремину ваљка, ако је његова површина једнака $\frac{1}{2}$ површине лопте.

Решење: $V = \dfrac{4R^3\pi}{5\sqrt{5}}$.

130. Израчунати површину и запремину правилног тетраедра ивице $a\,\mathrm{cm}$.

Решење: $P = a^2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2;\; V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}\,\mathrm{cm}^3.$

131. Висина праве тростране призме је $5\,\mathrm{cm}$, а запремина $24\,\mathrm{cm}^3$. Одредити дужине основних ивица, ако се површине бочних страна односе као $17 : 17 : 16$.

Решење: $a = \dfrac{17}{5}\,\mathrm{cm},\; b = \dfrac{17}{5}\,\mathrm{cm},\; c = \dfrac{16}{5}\,\mathrm{cm}.$

132. Дужине основних ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су $3a\,\mathrm{cm}$ и $2a\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину пирамиде, ако су све бочне ивице нагнуте према равни основе под углом од $45°$.

Решење: $V = \dfrac{19}{6}a^3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^3.$

133. Израчунати запремину праве тростране призме, ако је површина основе $10\,\mathrm{cm}^2$, а површине бочних страна су $25\,\mathrm{cm}^2$, $29\,\mathrm{cm}^2$ и $36\,\mathrm{cm}^2$.

Решење: $60\,\mathrm{cm}^3$.

134. Запремина квадра је $2080\,\mathrm{cm}^3$, површина је $996\,\mathrm{cm}^2$, а обим основе $58\,\mathrm{cm}$. Одредити дужине основних ивица квадра.

Решење: $13\,\mathrm{cm}$, $16\,\mathrm{cm}$.

135. Одредити реалан и имагинаран део комплексног броја $z = (1 + 2\,\mathrm{i})^3$.

Решење: $\mathrm{Re}\,z = -11, \mathrm{Im}\,z = -2$.

136. Одредити реалан и имагинаран део комплексног броја $z = \dfrac{2 + \mathrm{i}^{15}}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}^{12}}$.

Решење: $\mathrm{Re}\,z = -\frac{1}{2}, \mathrm{Im}\,z = \frac{3}{2}$.

137. Одредити вредност израза $f(z) = z^4 - 10z^3 + 36z^2 - 58z + 35$ за $z = 2 + \mathrm{i}$.

Решење: $f(2 + \mathrm{i}) = 0$.

138. Израчунати $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2011}+\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$.

Решење: $-\sqrt{2}$.

139. Одредити модуо комплексног броја $\dfrac{(1-\mathrm{i})^5}{(1+\mathrm{i})^4}$.

Решење: $\sqrt{2} \quad (|1-\mathrm{i}|)$.

140. Одредити z ако је $2z(3-5\,\mathrm{i})+z-1=-30-65\,\mathrm{i}$.

Решење: $z=3-5\,\mathrm{i}$.

141. Одредити у комплексној равни геометријско место тачака за које је $1\leqslant|z-1-\mathrm{i}|\leqslant 2$.

Решење. Кружни прстен $1\leqslant(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 4$.

142. У скупу комплексних бројева решити једначину $z^2=3-4\,\mathrm{i}$.

Решење: $z_1=-2+\mathrm{i}; \quad z_2=2-\mathrm{i}$.

143. Одредити реалне параметре a и b такве да је $(2+3\,\mathrm{i})a+(3+2\,\mathrm{i})b=1$.

Решење: $a=-\dfrac{2}{5}; \quad b=\dfrac{3}{5}$.

144. Одредити реалне бројеве a и b ако се зна да је $z=-3+\mathrm{i}$ једно решење једначине $z^3+z^2+az+b=0$.

Решење: $a=-20; \quad b=-50$.

145. Ако је $z+\dfrac{1}{z}=1$, израчунати $z^{1000}+\dfrac{1}{z^{1000}}$.

Решење: -1.

146. Колико има троцифрених бројева дељивих са 5 таквих да им се цифре не понављају?

Решење: 136.

147. Колико различитих десетоцифрених бројева можемо написати помоћу цифара $1, 2, 3, 4$, таквих да је цифра 3 употребљена тачно два пута, а цифра 4 тачно три пута?

Решење: 80640.

148. Колико има четвороцифрених бројева са различитим цифрама којима су две цифре парне, а две непарне?

Решење: 2160.

149. На полици се налази 10 различитих књига од којих су 4 из математике, 4 из физике и 2 из хемије. На колико начина се могу распоредити књиге на полици, ако се зна да све књиге из исте области морају бити једна до друге?

Решење: 6912.

150. Чланови бенда, у чијем саставу су 5 младића и 3 девојке, излазе један за другим на сцену. На колико начина то могу да ураде ако први на сцену излази један од младића, а две девојке не могу изаћи једна иза друге?

Решење: 7200.

151. У једној кутији је 9 куглица и то 2 жуте, 3 плаве и 4 црвене. Једну за другом, без враћања, извлачимо куглице из кутије. На колико различитих начина то можемо да урадимо? (Куглице исте боје се не разликују.)

Решење: 1260.

152. У скупу од 50 тачака има тачно 7 четворки колинеарних тачака. Колико је различитих правих одређено овим скупом тачака?

Решење: 1190.

153. Из групе од 4 мушкарца и 7 жена треба одабрати 6 особа тако да међу њима буду бар три жене. На колико начина се то може учинити?

Решење: 441.

154. Располажемо са 6 различитих основних боја. Боје можемо мешати узимајући једнаке количине основних боја и тако добијамо нове боје. Може ли се овим бојама обојити шаховска табла 8×8 тако да свако њено поље буде различито обојено?

Решење. Не може.

155. Од 10 различитих цветова треба направити букет тако да се он састоји од бар три цвета. На колико начина се букет може направити?

Решење: 968.