FURIJEOVI REDOVI – TEORIJA

<u>Dirhleovi uslovi</u>

Kaže se da funkcija f(x) ispunjava Dirihleove uslove u intervalu (*a,b*) ako je u tom intervalu:

i) uniformno ograničena, to jest da je $|f(x)| \le M$ **za svako** $x \in (a,b)$ **,gde je M konstanta**

(ako je ograničena u intervalu (*a,b*) ili konačna u svim tačkama tog intervala)

ii) ima ne više od konačnog broja tačaka prekida i sve su prvog reda, to jest u svakoj tački prekida postoji konačan levi i desni limes

(ako je u tom intervalu neprekidna ili ima konačan broj prekida prve vrste, takozvanih "skokova")

iii) ima ne više od konačnog broja pravih ekstremuma

(ako je u datom intervalu monotona ili ima konačan broj ekstremuma)

<u>Dirhleova teorema</u>

Neka je $f(x) \in X`, X` = \{ f \in X \,/\, f$ ima odgovarajuće jednostrane izvode na $[-\pi, \pi]$.

Furijeov red funkcije f(x) konvergira ka vrednosti:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

a u tačkama $x = \pm\pi$ konvergira ka

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$$

Na primer, ako uzmemo da su *b* i *c* tačke prekida prve vrste, Furijeov red ima sumu:

$$S = \frac{f(b-0)+f(b+0)}{2} \quad \text{ili} \quad S = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$$

Na primer, ako se radi o intervalu [*m,n*], na krajevima intervala Furijeov red ima sumu $S = \frac{f(m)+f(n)}{2}$

Kako se funkcija razvija u Furijeov red?

Na predavanjima profesori najčešće to objašnjavaju preko funkcije f(x) zadate u intervalu $[-\pi, \pi]$, koja se periodički produžava periodom 2π .

Furijeov red je oblika:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

a_0, a_n, b_n su Furijeovi koeficijenti koje mi ustvari i tražimo preko formula.

<u>1) Ako nam je dat interval</u> $[-\pi,\pi]$

i) Ako funkcija nije ni parna ni neparna, onda je:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ii) Ako je na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkcija neparna , onda je:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$ dok su $a_0=0\wedge a_n=0$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

iii) Ako je na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkcija parna, onda je:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$ dok je $b_n=0$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

2) Ako nam je dat interval $[-l, l]$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

3) Ako je funkcija data u proizvoljnom intervalu $[a, b]$

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a})$$

U zadacima će vam se često padati neki od sledećih integrala, pa da se nebi mučili:

$\int_{-\pi}^{\pi}$ sin nxdx = 0; $\int_{-\pi}^{\pi}$ cos nxdx = 0; $\int_{-\pi}^{\pi}$ cosnx sinnxdx = 0; $\int_{-\pi}^{\pi}$ cosnx cosmxdx = 0

$\int_{-\pi}^{\pi}$ sinnx sinmxdx = 0; $\int_{-\pi}^{\pi}$ $\cos^2$nxdx = π ; $\int_{-\pi}^{\pi}$ $\sin^2$nxdx = π

Kod svih ovih integrala je naravno $m \neq n$