STEPENI REDOVI – ZADACI (II deo)

Primer 1.

Funkciju $f(x) = arctgx$ razviti u stepeni red i odrediti njegovu oblast konvergencije.

Rešenje:

Ideja je da koristimo poznati razvoj $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1<x<1$

Dakle, ovde je $x^2 \in (-1,1) \to x \in (-1,1)$

Kako važi teorema $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_a^b a_n x^n dx)$, to jest da na intervalu konvergencije integral prolazi kroz stepeni red, imamo:

$$f(x) = arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n})dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \boxed{\int_0^x x^{2n}dx} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Uvek treba ispitati konvergenciju dobijenog reda na granicama intervala konvergencije.

Kod nas je to u ovom slučaju x = -1 i x = 1

Za x = -1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \to za\ x=-1 \to \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \overbrace{\boxed{(-1)^{2n}}}^{ovo\ je\ 1}(-1)^1}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}$$

Ovo je alternativni red i na njega ćemo primeniti Lajbnicov kriterijum:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \quad \text{i važi: } n+1>n \to 2(n+1)>2n \to 2(n+1)+1 > 2n+1 \to \frac{1}{2(n+1)+1} < \frac{1}{2n+1} \to \boxed{a_{n+1} < a_n}$$

Znači da je ovaj alternativni red konvergentan.

Za x = 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \to za\ x=1 \to \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1)^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Slično kao za prethodni brojni red i ovde je po Lajbnicovom kriterijumu red konvergentan.

Dakle, naš stepeni red je konvergentan za $x \in [-1,1]$

Primer 2.

Funkciju $f(x)=\ln\frac{2+x}{1-x}$ razviti u stepeni red.

Rešenje:

$$f(x)=\ln\frac{2+x}{1-x}$$

$$f`(x)=\frac{1}{\frac{2+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{2+x}{1-x}\right)`=\frac{\cancel{1-x}}{2+x}\cdot\frac{1(1-x)+1(2+x)}{(1-x)^{\cancel{2}}}=\frac{3}{(2+x)(1-x)}$$

Dobili smo racionalnu funkciju koju ćemo poznatim postupkom rastaviti na sabirke:

$$\frac{3}{(2+x)(1-x)}=\frac{A}{2+x}+\frac{B}{1-x}\text{.............................}/\cdot(2+x)(1-x)$$

$$3=A(1-x)+B(2+x)$$
$$3=A-Ax+2B+Bx$$
$$3=x(-A+B)+A+2B$$
$$-A+B=0$$
$$\underline{A+2B=3}$$
$$3B=3\to\boxed{B=1}\to\boxed{A=1}$$

$$\frac{3}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}+\frac{1}{1-x}=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{2})}+\frac{1}{1-x}}$$

Iskoristićemo $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad -1<x<1$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda je :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{2^n}}=2 \quad \text{, znači} \quad x\in(-2,2)$$

Sada , za interval $x\in(-1,1)$ (koji pripada dobijenom intervalu $(-2,2)$) imamo:

$$f`(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 2^n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} x^n}$$

Sad da preko integrala vratimo funkciju na f(x).

$$f(x) = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} \int_0^x x^n d = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} x^{n+1}}$$

Primer 3.

Funkciju $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ razviti u stepeni red, a zatim odrediti zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$

Rešenje:

Opet moramo rastaviti datu funkciju.

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / \cdot (1-x)^3$$

$$1 + x = A(1-x)^2 + B(1-x) + C$$

$$1 + x = A(1 - 2x + x^2 + B - Bx + C$$

$$1 + x = A - 2Ax + Ax^2 + B - Bx + C$$

$$1 + x = +Ax^2 + x(-2A - B) + A + B + C$$

$$A = 0$$

$$-2A - B = 1$$

$$\underline{A + B + C = 1}$$

$$B = -1 \to C = 2$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{0}{1-x} + \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$Dakle:$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}}$$

Znamo da je $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1<x<1$

Obeležimo sa $g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Izvod je :

$$g`(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)` = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$g``(x) = -\frac{1}{(1-x)^4}((1-x)^2)` = -\frac{1}{(1-x)^4}2(1-x)(-1) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Sad radimo:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = g`(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{/} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$ Pazi: moramo promeniti da n ide od 1.

$$\frac{2}{(1-x)^3} = g``(x) = \left(g`(x)\right)` = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)^{/} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Pazi: moramo promeniti da n ide od 2, ali pošto prethodna suma ide od 1, izvršićemo malu korekciju za ovu drugu sumu, stavićemo da ide od 1, a gde vidimo *n* pišemo *n+1*

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+1-1)x^{n+1-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}}$$

Sada se vraćamo na zadatak:

$$f(x) = g``(x) - g`(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[n(n+1)-n]x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[n^2+n-n]x^{n-1}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}}$$

Da bi našli traženi zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$, trebamo umesto x u našem redu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ staviti neki broj.

Ovde je očigledno da to treba biti $\frac{1}{2}$. Ovu vrednost menjamo u početnu , zadanu, funkciju:

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \to f(\frac{1}{2}) = \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 12$$

Primer 4.

Odrediti oblast konvergencije i sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ a zatim naći sumu numeričkog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$

Rešenje:

Kako je $a_n = n^2$ koristimo formulu $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ **=R**

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \textbf{dakle} \quad \mathrm{R}=1$$

Red je konvergentan za $x \in (-1,1)$. Moramo ispitati šta se dešava za x = -1 i za x = 1

Za x = 1

Dobijamo brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$. Ovde odmah možemo zaključiti da red divergira jer mu opšti član ne teži nuli: $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Za x = -1

Slično razmišljamo: dobijeni red je $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-1)^{n-1}$, ali i on divergira jer mu opšti član ne teži nuli.

Zaključujemo da oblast konvergencije ostaje $x \in (-1,1)$

Koristićemo poznati razvoj $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $-1<x<1$.

Pošto u našem redu n ide od 1 , napravićemo malu korekciju ($\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sve pomnožimo sa x):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \qquad x \in (-1,1)$$

Dalje radimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n\cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\text{ide ispred}}\cdot x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \underbrace{\boxed{n\cdot x^{n-1}}}_{\substack{\text{ovo je izvod}\\ \text{od } x^n}} = x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot (x^n)` = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n\right)' =$$

Sad unutar zagrade radimo isti trik kao malopre:uzmemo x pa ispred zagrade

$$x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)`\right)' = x\left(x\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^n}_{\text{ovo zamenimo}}\right)'\right)' = x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'$$

E sad samo imamo posao da nadjemo ove izvode:

$$x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = x\left(x\left(\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)\right)' = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\cdot\frac{(1-x)^2-2(1-x)(-1)x}{(1-x)^4} =$$

$$= x\frac{(1-x)^2+2(1-x)x}{(1-x)^4} = x\frac{\cancel{(1-x)}[1-x+2x]}{(1-x)^{\cancel{4}}} = x\frac{x+1}{(1-x)^3} = \boxed{\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}}$$

Sumu numeričkog reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ ćemo naći kada umesto x stavimo $-\frac{1}{2}$ u $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ odnosno u $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)}{(1-(-\frac{1}{2}))^3} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{27}{8}} = \boxed{-\frac{2}{27}}$$

Primer 5.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ i na intervalu konvergencije naći njegovu sumu.

Rešenje:

Iz $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ **=R** dobijamo: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{1}{1} = 1$

Odavde zaključujemo da red konvergira za $x\in(-1,1)$.

Za x = - 1

Dobijamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}(-1)^n$, ali je očigledno da njegov opšti član ne teži nuli , $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ **pa red divergira.**

Za x = 1

Slična situacija, dobijamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ čiji opšti član ne teži nuli , pa je red **divergentan.**

Zaključujemo da je oblast konvergencije datog reda interval $(-1,1)$.

Obeležimo sumu reda sa $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$

Najpre ćemo , na intervalu konvergencije, dati red integraliti da “ uništimo” n+1, dakle:

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\int_o^x x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n+1}}{n}\frac{x^{n+1}}{\cancel{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$$

Izbacimo jedno x ispred: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

Odavde je dakle:

$$\int_0^x f(x)dx = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\text{.......................................}/:x$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Sad tražimo izvod od ovoga:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \to \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Odavde je dakle $\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx\right)' = \frac{1}{1-x}$

Da bi našli $\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx$ moramo integraliti $\frac{1}{1-x}$, pa dobijamo:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln|1-x|\Big|_0^x = \boxed{-\ln|1-x|}$$

Odavde imamo:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx = -\ln|1-x| .... /*x$$

$$\int_0^x f(x)dx = -x\ln|1-x|$$

Konačno će biti:

$$f(x) = \left(\int_0^x f(x)dx\right)^{/} = \underbrace{\left(-x\ln|1-x|\right)^{/}}_{izvod\ proizvoda} = -1\cdot\ln|1-x| + \frac{1}{1-x}(-1)(-x) = \boxed{-\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}}$$