STEPENI REDOVI – ZADACI (I deo)

DEF: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(t-t_0)^n$ je stepeni red , ako stavimo $t-t_0=x$, dobijamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$

Delimična suma reda je $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; a n-ti ostatak je $R_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} x^{n+k}$

Ako postoji R tako da je $|x|<R$ onda taj red konvergira, a za $|x|>R$ divergira.

Interval (-R,R) je interval konvergencije reda **.**

konvergira

divergira **-R** **R** **divergira**

Za x=R i x=-R, radimo posebno , koristeći kriterijume za konvergenciju brojnih redova.

Košijeva formula: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$

Korena formula: $\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ to jest $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Važe sledeće teoreme: Neka je $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

1) $\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lim_{x\to x_0} a_n x^n) = S(x_0)$

2) $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx\right)$

3) **Stepeni red se na intervalu konvergencije može diferencirati član po član**

RAZVOJI

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gde je $(-\infty<x<\infty)$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty<x<\infty)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<\infty)$

$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$, $-1<x<1$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $-1<x<1$

$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $-1<x<1$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $-1<x<1$

$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

Primer 1.

Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije za sledeće stepene redove:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

v) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Rešenja:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Ovde je $a_n = n+1$ pa ćemo iskoristiti **Košijevu formulu:** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ **=R**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1} = 1$$

Dobili smo da red konvergira u intervalu $(-1,1)$. Sad moramo ispitati za x = -1 i za x=1.

<u>za x = -1</u>

Ovu vrednost zamenimo u dati red : $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \to \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$

Dobili smo alternativni red. Kako je $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ zaključujemo da ovde red divergira.

<u>za x = 1</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \to \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)}$$

Ovaj brojni red takodje divergira, jer mu opšti član ne teži nuli: $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

Zaključak: Red $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ je konvergentan na intervalu $(-1,1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Ovde je $a_n = \frac{1}{n}$ pa je zgodno opet koristiti Košijevu formulu :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1} = 1$$

Dobili smo **R=1** pa za sada imamo da red konvergira na intervalu (- 1,1)

<u>za x = -1</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Ovo je alternativni red gde je $a_n = \frac{1}{n}$

Red je opadajući jer $n < n+1 \to \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \to a_n > a_{n+1}$ i opšti član teži nuli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pa po Lajbnicovom kriterijumu ovde red konvergira.

<u>za x = 1</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Za ovaj red još od ranije znamo da je divergentan (pogledaj prethodne fajlove o brojnim redovima)

Zaključak: Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je konvergentan na intervalu [-1,1)

v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Kako je $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$ zgodno je probati Košijevu formulu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n^2+1}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}}}_{teži\ 1} = \frac{1}{2}$$

Znači da red konvergira , za sad , u intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

<u>za x = $-\frac{1}{2}$</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-\frac{1}{2})^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \frac{(-1)^n}{2^n}}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Dobili smo alternativni red kod koga je $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

Red je opadajući i opšti član teži nuli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ pa po Lajbnicovom kriterijumu ovaj red konvergira.

<u>za x = $\frac{1}{2}$</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (\frac{1}{2})^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \frac{1}{2^n}}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Ovaj brojni red je takodje konvergentan (direktna upotreba reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za k>1 konvergira, a za k$\leq$ 1 divergira)

Zaključak: Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$ je konvergentan na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Primer 2.

2) Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije za sledeće stepene redove:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$

Rešenje:

Ovde ćemo koristiti drugu formulu za traženje poluprečnika konvergencije reda : $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\frac{1}{R}=e\to\boxed{R=\frac{1}{e}}$$

Dakle, za sada znamo da ovaj red konvergira u intervalu $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

Za $\underline{\mathrm{x}=\frac{1}{e}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(\frac{1}{e})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

Proverimo najpre da li opšti član teži nuli:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}e^n\frac{1}{e^n}=1$ Odavde zaključujemo da red divergira.

Za $\underline{\mathrm{x}=-\frac{1}{e}}$

Ovde se radi o alternativnom redu, ali sličnim načinom razmišljanja dolazimo do zaključka da i ovde red divergira.

Zaključak: red $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$ konvergira u intervalu $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$

Primenjujemi isti kriterijum:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{2^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}2=2$$

$$\frac{1}{R}=2\to\boxed{R=\frac{1}{2}}$$

Šta ovde moramo voditi računa?

Pogledajmo zadati red $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\left(x^2\right)^n$

Znači da se ovaj poluprečnik konvergencije odnosi na x^2 a na x će se odnositi:

$R=\frac{1}{2}$ je za $x^2\to R=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ je za x

Red dakle konvergira u intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Za $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ redovi će biti divergentni jer očigledno opšti član ne teži nuli.

Zaključak: red $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$ konvergira u intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.