DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA (I VIŠEG)

JEDNAČINA OBLIKA $Y^{(n)}= f(x)$

Red ove diferencijalne jednačine se smanjuje neposrednom integracijom.

JEDNAČINA OBLIKA $F(x, y^k, y^n) = 0$

Uvodimo smenu $y^k= p$, odavde je $y^{k+1}= p`$ itd. (odnosno y`=p pa je y``=p`)

JEDNAČINA OBLIKA $F (y,y`,y``,\ldots,y^{(n)})$

Uvodimo smenu y`=p, ali pazimo , sada je y``=p $\frac{dp}{dy}$, odnosno y``=p p`

JEDNAČINA OBLIKA y``+ a(x)y`+b(x)y=f(x)

Posmatramo odgovarajuću homogenu jednačinu : y``+ a(x)y`+b(x)y=0
Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ ove jednačine onda je drugo rešenje:

$y_2(x)= y_1(x)\int\frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)}dx$, pa je rešenje homogene jednačine $y(x)=c_1\, y_1(x)+c_2\, y_2(x)$
Nadalje variramo konstante da bi našli rešenje odgovarajuće početne nehomogene jednačine.

OJLEROVA JEDNAČINA

$$\mathbf{x^n y^{(n)}+ a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy`+a_n y = 0\ (ili=f(x))}$$

Uvodimo smenu $\mathbf{x=e^t}$, odavde je: $y`=\frac{y`_t}{e^t}$; $y``=\frac{y_t``-y_t`}{e^{2t}}$; $y```=\frac{y_t```-3y_t``+2y_t`}{e^{3t}}$. Itd.

Odakle ovo? Važi da je:

$y`=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y`_t}{e^t}$ dalje je $y``=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{y`_t}{e^t})}{\frac{dx}{dt}}=itd$.

Najpre rešimo homogenu Ojlerovu jednačinu , a onda rešavamo nehomogenu varijacijom konstanata ili suprotnim koeficijentima.

LINEARNA HOMOGENA D.J. SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA(DRUGOG REDA)

$$y``+a_1y`+a_2y=o$$

Njoj najpre pridružujemo karakterističnu jednačinu:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

U zavisnosti od rešenja karakteristične jednačine razlikujemo tri slučaja:

1) λ_1 i λ_2 su realna i različita, onda je : y(x)= $c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$

2) λ_1 i λ_2 su realna i jednaka rešenja , onda je : y(x)= $c_1e^{\lambda_1 x} + x\,c_2e^{\lambda_2 x}$

3) λ_1 i λ_2 su konjugovano kompleksni brojevi : λ_1=a+bi, λ_2=a-bi , onda je :
$y(x)=c_1e^{ax}\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx$

LINEARNA NEHOMOGENA D.J. SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA(DRUGOG REDA)

$$y``+a_1y`+a_2y=f(x)$$

1) METOD VARIJACIJE KONSTANATA

Najpre rešimo homogenu jednačinu $y``+a_1y`+a_2y=o$.

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ i posmatramo sistem :

$$c`_1(x)y_1+c`_2(x)y_2=0$$

$$c`_1(x)y`_1+c`_2(x)y`_2=f(x)$$

Rešimo sistem po c_1 i c_2 ta rešenja zamenimo u $y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$

Pazimo,jer su c_1 i c_2 funkcije od x-sa

2) **METOD NEODREDJENIH KOEFICIJENATA**

i) Ako je $f(x)=e^{ax}P_n(x)$

1) a nije koren karakteristične jednačine, onda je $y=e^{ax}Q_n(x)$, gde je $Q_n(x)$ polinom n-tog stepena sa neodredjenim koeficijentima.

2) ako je a koren karakteristične jednačine onda je $y= x^m e^{ax}Q_n(x)$, gde je m reda korena a

ii) Ako je $f(x)= e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx]$

1) Ako $a \pm bi$ nisu koreni karakteristične jednačine:
$y= e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$ gde je $N=\max(n,k)$

2) Ako su $a \pm bi$ koreni karakteristične jednačine:

$y=x^m e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$, gde je m- reda $a \pm bi$