VIŠESTRUKI INTEGRALI - ZADACI (V DEO)

Izračunavanje površine površi

i) Ako je površ zadata jednačinom z = z(x,y) i ako obeležimo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ onda je:

$$P=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

ii) Ako je površ zadata parametarskim jednačinama x=x(u,v) i y=y(u,v) onda je:

$$P=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad \text{gde je:}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

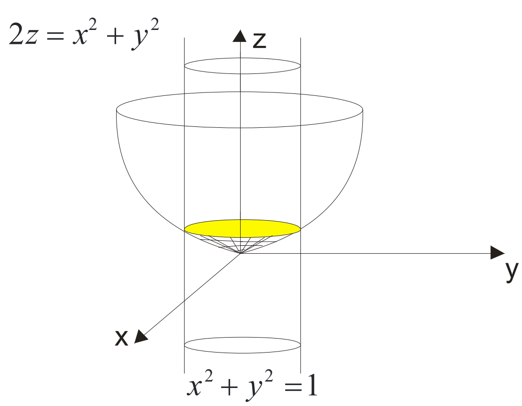
Jedan savet: pre proučavanja ove oblasti se **obavezno podsetite parcijalnih izvoda** (imate fajl kod nas)

Primer 1.

Izračunati površinu dela paraboloida $2z = x^2 + y^2$ koji iseca cilindar $x^2 + y^2 = 1$

Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku da vidimo o kojoj se površini radi.



Koristićemo formulu $\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$ gde nam je z = z(x,y) paraboloid $z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$
a cilindar će nam dati granice po kojima radimo...

$$z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$
$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2}=x$$
$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2}=y$$

Najbolje da na stranu sredimo (sad nije teško, al za drugi put da znamo) : $\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$

$$P=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

Rekosmo da nam cilindar $x^2+y^2=1$ odredjuje granice.

Uzimamo polarne koordinate:

$$\left.\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{matrix}\right\}\rightarrow |J|=r \quad \text{onda je} \quad 0\le r\le 1 \quad \text{i} \quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$P=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\underbrace{\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi}}_{\text{Ovo je } 2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot rdr=$$

Rešićemo ovaj integral “na stranu ” pa ćemo posle ubaciti granice…

$$\int \sqrt{1+r^2}\cdot rdr=\left|\begin{matrix} 1+r^2=t^2 \\ 2rdr=2tdt \\ rdr=tdt \end{matrix}\right|=\int\sqrt{t^2}\cdot tdt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}=\frac{\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3}{3}$$

Sad mu ubacimo granice:

$$P=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\underbrace{\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi}}_{\text{Ovo je } 2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot rdr=2\pi\cdot\left.\frac{\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3}{3}\right|_0^1$$
$$=\frac{2\pi}{3}\left(\left(\sqrt{1+1^2}\right)^3-\left(\sqrt{1+0^2}\right)^3\right)=\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{2}^3-1\right)=\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$
$$\boxed{P=\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$

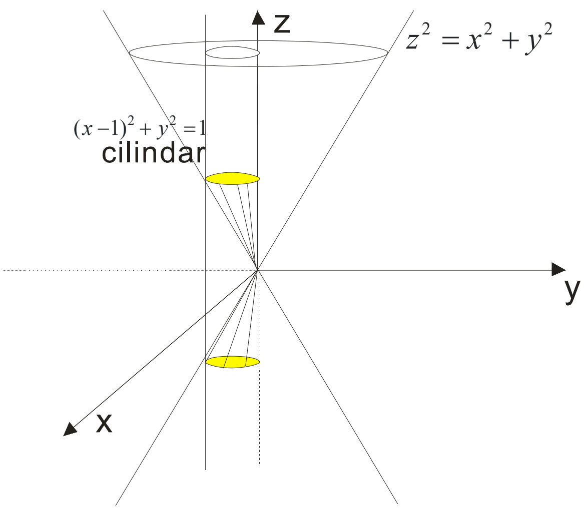
Primer 2.

Izračunati površinu dela konusa $z^2 = x^2 + y^2$ isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$

Rešenje:

Spakujmo malo cilindar i nacrtajmo sliku:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

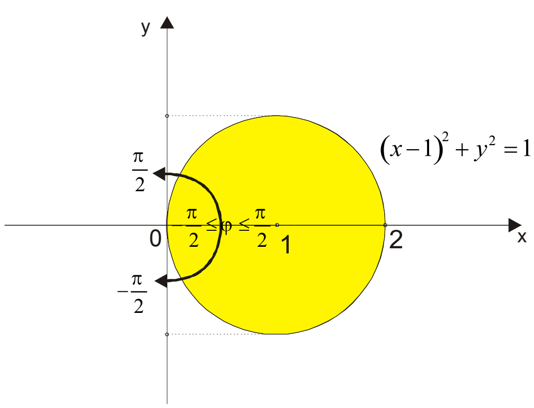


Vidimo da ćemo imati dve simetrične površine u odnosu na ravan z = 0.

Naći ćemo jednu pa to pomnožiti sa 2.

Cilindar će nam dakle dati granice!

Nacrtajmo sliku u ravni i odredimo granice:



Uzimamo polarne koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \to |J| = r \quad \text{onda je}$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 - 2r\cos\varphi = 0$$

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2r\cos\varphi$$

$$r^2 = 2r\cos\varphi \to r = 2\cos\varphi$$

Odavde zaključujemo: $0 \le r \le 2\cos\varphi$

Sa slike vidimo da ugao ide od $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \to \text{Mi radimo za } z = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} == \sqrt{\frac{2\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Da nadjemo površinu:

$$P_1 = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4\cos^2\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \cancel{2}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{\cancel{2}} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\frac{-\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$$

Sad ovu površinu pomnožimo sa 2: $\boxed{P = 2P_1 = 2\pi\sqrt{2}}$

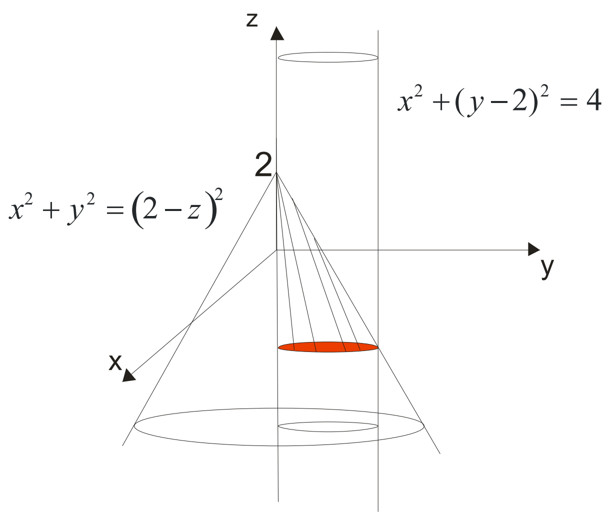
Primer 3.

Izračunati površinu površi koju cilindar $x^2+(y-2)^2=4$ iseca na konusu $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$

Rešenje:

Sredimo konus da bi mogli da nacrtamo sliku:

$$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=2-z$$
$$x^2+y^2=(2-z)^2$$



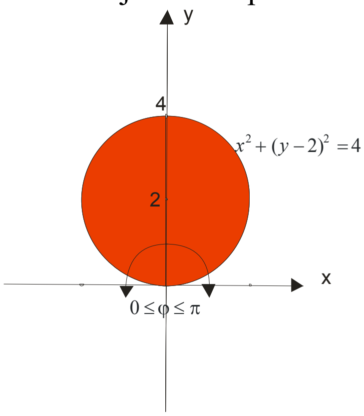
$$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}==\sqrt{\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$P=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_D \sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\underbrace{\boxed{\iint_D dxdy}}_{\text{Ovo je P za oblast D}}$$

Površina je ustvari površina kruga:



$$P_D=r^2\pi=2^2\pi=4\pi$$

$$P=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_D \sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\underbrace{\boxed{\iint_D dxdy}}_{\text{Ovo je P za oblast D}}=4\sqrt{2}\pi$$

$$\boxed{P=4\sqrt{2}\pi}$$

Pogledajmo sada prethodni zadatak...Pa i tamo smo mogli ovo iskoristiti, zar ne?

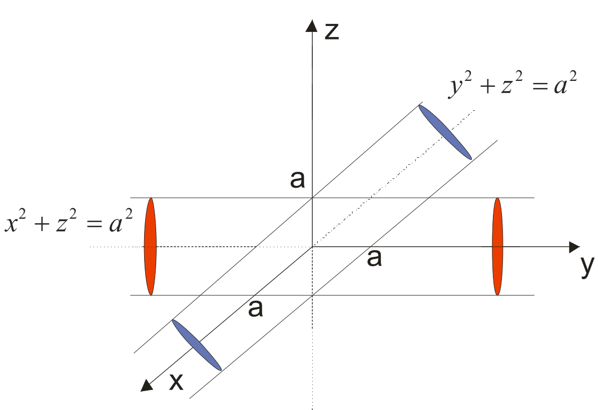
Mi smo vam pokazali oba načina a vi naravno , radite kako zahteva vaš profesor.

Primer 4.

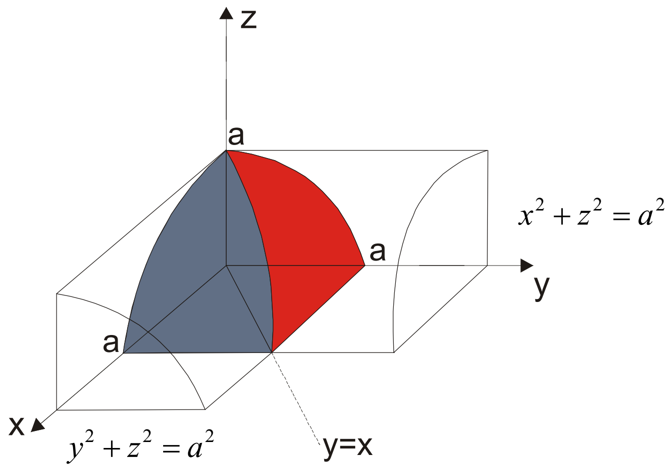
Izračunati površinu tela koje je ograničeno cilindrima $x^2+z^2=a^2$ i $y^2+z^2=a^2$.

Rešenje:

Nacrtajmo sliku...



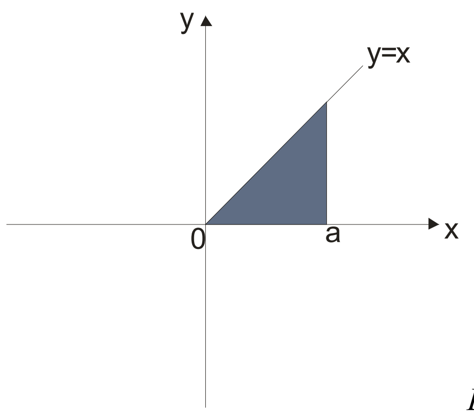
Izdvojimo sada prvi oktant.



Uočimo ovde dve površine. One su jednake, a takvih ima 16 računajući sve oktante.

Znači, ideja je naći površinu jednog dela pa sve to pomnožiti sa 16.

Nadjimo granice u ravni xOy



$$D:\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le x\end{cases}$$

$$x^2+z^2=a^2$$
$$z^2=a^2-x^2$$
$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

Nama treba prvi oktant, pa je:

$$z=+\sqrt{a^2-x^2}$$
$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{a^2-x^2+x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$P=16\cdot\int_0^a dx\int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dy=16a\cdot\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x dy=16a\cdot\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Ovaj integral smo već više puta rešavali:

$$\boxed{P=16a^2}$$

Primer .

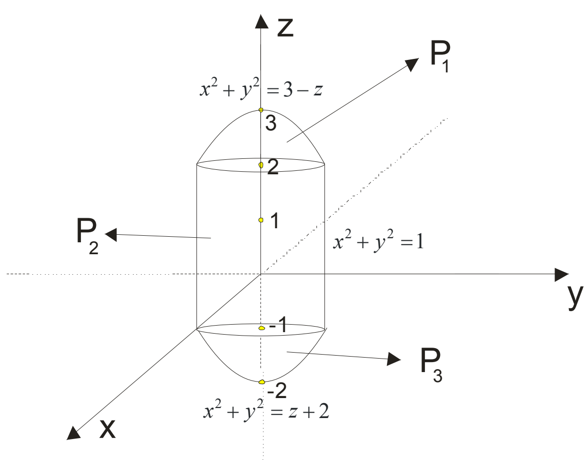
Izračunati površinu tela koje je ograničeno sa:

$x^2+y^2=z+2$

$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=3-z$

Rešenje:



Uočavamo da se tražena površina sastoji od tri dela. Svaku od ovih površina ćemo naći posebno a onda sabrati dobijene rezultate...

Prvi deo je površina paraboloida $x^2+y^2=3-z$ koji odseca konus $x^2+y^2=1$.

$x^2+y^2=3-z$

$z=3-\left(x^2+y^2\right)$

$p=-2x$

$q=-2y$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}=\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$$

Cilindar $x^2+y^2=1$ odredjuje granice.

Uzimamo polarne koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right\}\rightarrow |J|=r \quad \text{onda je} \quad 0\le r\le 1 \quad \text{i} \quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$P_1=\iint\limits_D \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\underbrace{\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi}}_{\text{Ovo je } 2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\cdot rdr=$$

Rešićemo ovaj integral “na stranu ” pa ćemo posle ubaciti granice…

$$\int\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr=\left|\begin{array}{l} 1+4r^2=t^2 \\ 8rdr=2tdt \\ rdr=\dfrac{tdt}{4} \end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\sqrt{t^2}\cdot tdt=\frac{1}{4}\int t^2dt=\frac{1}{4}\frac{t^3}{3}=\frac{\left(\sqrt{1+4r^2}\right)^3}{12}$$

Sad mu ubacimo granice:

$$P_1=\iint\limits_D \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\underbrace{\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi}}_{\text{Ovo je } 2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\cdot rdr=2\pi\cdot\left.\frac{\left(\sqrt{1+4r^2}\right)^3}{12}\right|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot[\left(\sqrt{1+4}\right)^3-\left(\sqrt{1}\right)^3]=\frac{\pi}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

$$\boxed{P_1=\frac{\pi}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-1\right)}$$

Dalje ćemo izračunati površinu P_3 , površinu paraboloida $x^2+y^2=z+2$ koju odseca konus $x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=z+2$

$z=\left(x^2+y^2\right)-2$

$p=2x$

$q=2y$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}=\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$$

$$P_3=\iint\limits_D \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

Kao što vidimo ova površina je ista kao i površina u prethodnom delu:

Dakle $\boxed{P_3=\frac{\pi}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-1\right)}$

Nadjimo još preostalu površinu P_2. Pogledajmo sliku još jednom. Vidimo da je to ustvari omotač valjka

čija je visina H= 3 a poluprečnik osnove r = 1.

Zašto je H= 3 ?

Ako rešavamo sistem $x^2+y^2=3-z$ i $x^2+y^2=1$ tu je z= 2

Ako rešavamo sistem $x^2+y^2=z+2$ i $x^2+y^2=1$ tu je z = -1

Dakle , visina po z osi je 3.

$$P_2=M_{valjka}=2r\pi H$$
$$P_2=2\cdot1\cdot\pi\cdot3$$
$$\boxed{P_2=6\pi}$$

Saberimo sad dobijene rezultate:

$$P=P_1+P_2+P_3$$
$$P=\frac{\pi}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-1\right)+6\pi+\frac{\pi}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-1\right)$$
$$P=\frac{\pi}{3}\cdot\left(5\sqrt{5}-1\right)+6\pi$$
$$\boxed{P=\frac{\pi}{3}\cdot\left(5\sqrt{5}+17\right)}$$