POVRŠINSKI INTEGRALI

Površinski integral prve vrste

i) Ako je S deo po deo glatka dvostrana površ zadata jednačinama:

x=x(u,v)
y=y(u,v)
z=z(u,v)

gde (u,v) pripada D a funkcija f(x,y,z) je definisana i neprekidna na površi S , onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Ako jednačina površi S ima oblik z=z(x,y) , gde je z=z(x,y) jednoznačna neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \qquad \text{i}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

POVRŠINSKI INTEGRAL PRVE VRSTE NE ZAVISI OD ORIJENTACIJE KRIVE

Površinski integral druge vrste

Ako je S glatka dvostrana površ na kojoj je izabrana jedna od dveju strana , određena smerom normale

$\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ i z = z(x,y) tada je :

$$\cos\alpha = \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad \text{gde je:} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} \ \text{ i } \ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

VAŽNO

(**Da li ćemo uzeti + ili – zavisi od ugla koji normala gradi sa pozitivnim delom z-ose:**

Ako je taj ugao oštar ,onda mora biti cos γ **>0 pa uzimamo minus ispred korena,** $\cos\gamma = \dfrac{-1}{-\sqrt{1+p^2+q^2}}$

Ako je taj ugao tup, onda je cos γ **<0 , pa uzimamo + ispred korena** $\cos\gamma = \dfrac{-1}{+\sqrt{1+p^2+q^2}}$ **)**

a P=P(x,y,z) Q=Q(x,y,z) i R=R(x,y,z) tri funkcije, definisane i neprekidne na površi S, onda je

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

Površinski integral druge vrste **zavisi** od orijentacije krive.

Prelaskom na drugu stranu površi menja se znak.

STOKSOVA FORMULA

Ako su P, Q, R neprekidne diferencijabilne funkcije a L zatvorena , deo po deo glatka kriva koja je granica deo po deo dvostrane površi S, tada je:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

pri čemu su $\cos\alpha$, cos β i cos γ koordinate normale površi S koja je orijentisana na onu stranu u odnosu na koju se obilazak krive L vrši u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu.

FORMULA OSTROGRADSKOG

Ako je S deo po deo glatka površ , koja ograničava oblast V , a P, Q i R neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $V \cup S$, onda važi formula:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

gde su $\cos\alpha$, cos β i cos γ kosinusi pravca spoljašnje normale površi S.