KRIVOLINIJSKI INTEGRALI – zadaci (III deo)

Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ ne zavisi od putanje integracije

2) Postoji funkcija u=u(x,y) tako da je du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz i tada važi :
$\int_A^B$ P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(B) - u(A)

3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

4) $\int_C$ P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 ako je kriva c zatvorena.

1. Odrediti funkciju u = u (x,y) ako je poznat njen totalni diferencijal :

$$du = \left(2x\cos y - y^2 \sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2 \sin y\right)dy$$

Rešenje:

Znamo da formula za totalni diferencijal glasi: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ **pa zaključujemo da je:**

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos y - y^2 \sin x$ **i** $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos x - x^2 \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos y - y^2 \sin x$

$u(x,y) = \int \left(2x\cos y - y^2 \sin x\right)dx + \varphi(y)$ sami dodajemo neku funkciju "po y", recimo $\varphi(y)$

$u(x,y) = 2\cos y \int xdx + y^2 \int \sin xdx + \varphi(y)$

$u(x,y) = 2\cos y \cdot \frac{x^2}{2} + y^2 \cdot \cos x + \varphi(y)$

$\boxed{u(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + \varphi(y)} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \sin y + 2y\cos x + \varphi`(y)$

Sad ovo uporedimo sa $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos x - x^2 \sin y$ **Ideja je da nadjemo** $\varphi(y)$.

$\cancel{-x^2 \sin y} + \cancel{2y\cos x} + \varphi`(y) = \cancel{2y\cos x} \cancel{-x^2 \sin y} \rightarrow \varphi`(y) = 0 \rightarrow \varphi(y) = c$ (neka konstanta)

I našli smo traženu funkciju: $\boxed{u(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + c}$

2. Odrediti funkciju u = u (x, y, z) ako je poznat njen totalni diferencijal :

$$u(x,y,z) = (1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z})dx + (\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2})dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

Rešenje:

Ovde formula za totalni diferencijal glasi: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ **pa zaključujemo da je:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{z}+\frac{x}{y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$$

Krećemo od:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}$$

$$u(x,y,z) = \int\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx + \varphi(y,z) \rightarrow \text{sad moramo dodati funkciju " po y i po z"}$$

$$u(x,y,z) = \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\int dx + \varphi(y,z)$$

$$\boxed{u(x,y,z) = \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot x + \varphi(y,z)} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2}+\frac{x}{z}+\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

Sad ovo izjednačavamo sa $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}$

Dakle:

$$\frac{x}{y^2}+\frac{x}{z}+\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = \frac{x}{y^2}+\frac{x}{z} \rightarrow \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 0 \rightarrow \varphi(y,z) = \delta(z) \rightarrow \textit{samo funkcija " po z"}$$

Pa je sada $u(x,y,z) = \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot x + \varphi(y,z) \rightarrow u(x,y,z) = \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot x + \delta(z)$

Sad je izvod ove funkcije "po z" jednak

$$u(x,y,z) = \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot x + \delta(z) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \boxed{-\frac{xy}{z^2}+\delta`(z)}$$

Ovo izjednačavamo sa $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$ pa je $-\frac{xy}{z^2}+\delta`(z) = -\frac{xy}{z^2} \rightarrow \delta`(z) = 0 \rightarrow \delta(z) = c$ (neka konstanta)

Tražena funkcija je onda: $u(x,y,z) = \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot x + c$

3. Dokazati da je vrednost krivolinijskog integrala $\int_c f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$ uzetog po zatvorenoj konturi jednaka 0, nezavisno od oblika funkcije u podintegralnom izrazu.

Rešenje:

Iz $\int_c f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\int_c x\cdot f(x^2+y^2)dx+y\cdot f(x^2+y^2)dy$ uočimo da je :

$$P(x,y)=x\cdot f(x^2+y^2)\rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=x\cdot f`(x^2+y^2)\cdot 2y=\boxed{2xy\cdot f`(x^2+y^2)}\quad \text{i}$$

$$Q(x,y)=y\cdot f(x^2+y^2)\rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=y\cdot f`(x^2+y^2)\cdot 2x=\boxed{2xy\cdot f`(x^2+y^2)}$$

To znači da je $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ pa je po teoremi koju smo dali na početku fajla $\int_c f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\mathbf{0}$

Grinova formula:

Ako kriva C ograničava oblast D (to jest ona je rub oblasti D) pri čemu D ostaje sa leve strane prilikom obilaska krive C, i važi da su funkcije P,Q,R neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi formula:

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

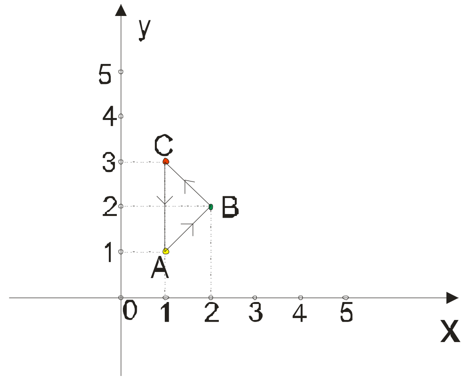
Iz Grinove formule se lako dokazuje da je **površina oblasti P(D)** koja je ograničena krivom C data formulom:

$$\text{P(D)}=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx$$

4. Izračunati $\int_c 2(x^2+y^2)dx+(x+y)dy$ ako je c kontura trougla sa temenima A(1,1) , B(2,2) i C(1,3).

Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku .....



Sa slike uočimo da je :

$\overline{AB}: y = x$

$\overline{BC}: y = 4 - x$

$\overline{CA}: x = 1$

Dalje iz datog integrala $\int_c 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$ je :

$$P(x,y) = 2(x^2+y^2) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$$

$$Q(x,y) = (x+y)^2 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y)$$

Pa je onda $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ = 2(x+y)-4y = 2(x-y)

Još da odredimo granice integracije i možemo upotrebiti Grinovu formulu!

$D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le 4-x \end{cases}$ (pogledajte sliku još jednom)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \int_1^2 dx \int_x^{4-x} 2(x-y)dy = \int_1^2 \left(\left(2xy - \cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_x^{4-x}\right)dx =$$

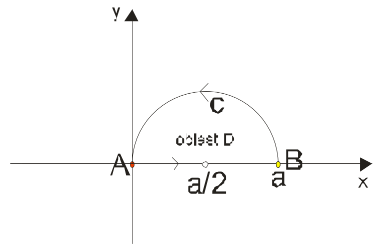
$$= \int_1^2 \Big(\big(2x(4-x) - 2x\cdot x\big) - \big((4-x)^2 - x^2\big)\Big)dx = \int_1^2 \left(8x - 2x^2 - 2x^2 - 16 + 8x - x^2 + x^2\right)dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-4x^2 + 16x - 16\right)dx = -4\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right)dx = -4\int_1^2 (x-2)^2\ dx = -4\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_1^2 = -\frac{4}{3}$$

5.Izračunati $I=\int_c \left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - m\right)dy$ ako je c gornji deo kruga $x^2+y^2=ax$.

Rešenje:

Spakujmo najpre kružnicu i nacrtajmo sliku:



$$x^2+y^2=ax$$
$$x^2-ax+y^2=0$$
$$x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2=0$$
$$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Posmatrajmo krivu c_1 tako da je $\int_{c_1} = \int_c + \int_{\overline{AB}}$.

Što ovo radimo?

Zato što Grin zahteva da oblast bude zatvorena! Sad formulu možemo primeniti na krivu c_1.

$$P(x,y)=e^x \sin y - my \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=e^x \cos y - m$$
$$Q(x,y)=e^x \cos y - m \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x \cos y$$

Odavde je : $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\; e^x \cos y-\left(e^x \cos y - m\right)=m$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D mdxdy = m\cdot\iint_D dxdy = m\cdot P(D)$$

Površina oblasti P(D) je ustvari polovina površine kruga poluprečnika $\frac{a}{2}$ pa je:

$P(D)=\frac{1}{2}r^2\pi=\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2\pi=\frac{a^2\pi}{8}$ odnosno, traženo rešenje je:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D mdxdy = m\cdot\iint_D dxdy = m\cdot P(D)=\frac{ma^2\pi}{8}$$

6. Izračunati površinu oblasti ograničenu krivama $x = a\cos^3 t$ i $y = a\sin^3 t$ ako je $0 \le t \le 2\pi$.

Rešenje:

Iskoristićemo formulu P(D)= $\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$ to jest $P(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[P(x(t), y(t), z(t))x_t^{`} + Q(x(t), y(t), z(t))y_t^{`}]dt$

Iz :

$$x = a\cos^3 t \to x` = -3a\cos^2 t\sin t$$
$$y = a\sin^3 t \to y` = 3a\sin^2 t\cos t$$

pa imamo:

$$P(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[P(x(t), y(t), z(t))x_t^{`} + Q(x(t), y(t), z(t))y_t^{`}]dt$$
$$P(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t \cdot (-3a\cos^2 t\sin t)]dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[3a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 3a^2\sin^4 t \cdot \cos^2 t]dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[3a^2\cos^2 t \cdot \sin^2 t \cdot \boxed{\underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}_{ovo\ je\ 1}}]dt =$$
$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}[\cos^2 t \cdot \sin^2 t]dt =$$

Sad malo upotrebimo formule iz trigonometrije: $\cos^2 t \cdot \sin^2 t = \frac{4\cos^2 t \cdot \sin^2 t}{4} = \frac{\sin^2 2t}{4} = \frac{1 - \cos 4t}{8}$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}[\frac{1-\cos 4t}{8}]dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}[1 - \cos 4t]dt = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \boxed{\frac{3a^2\pi}{8}}$$

7. **Izračunati krivolinijski integral** $\int_c (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ **gde je kriva c zadata sa** $|x-1| + |y-1| = 1$ **.**

Rešenje:

Ako se sećate ovaj integral smo rešavali u prethodnom fajlu o krivolinijskim integralima.

Ovde ćemo zadatak rešiti primenom Grinove formule.

$$\int_c (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy \quad \text{odavde je :}$$

$$P(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x,y) = x^2 - y^2 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

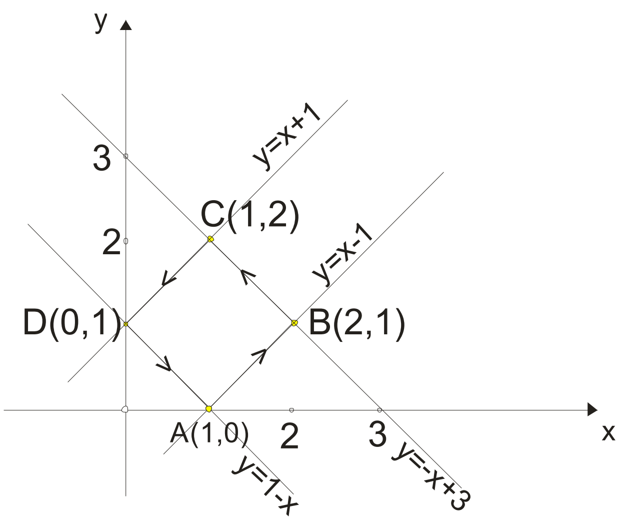
pa je:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y = 2(x-y)$$

Dakle:

$$I = \int_D 2(x-y)dxdy = 2\int_D (x-y)dxdy$$

Podsetimo se slike iz prethodnog fajla:



Ovde ćemo morati da uzimamo smene:

$$u = y + x$$
$$\underline{v = y - x}$$

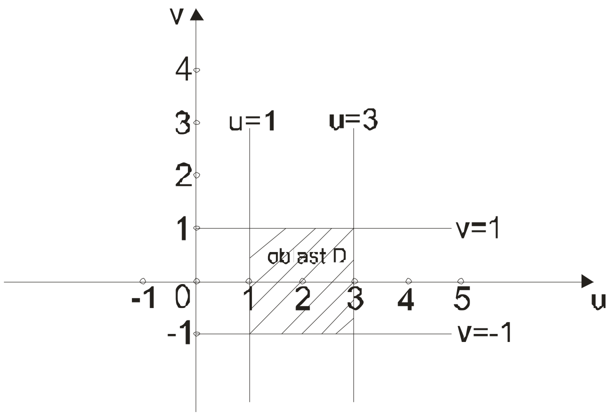
$$u + v = 2y \rightarrow y = \frac{u+v}{2} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$u - v = 2x \rightarrow x = \frac{u-v}{2} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Jakobijan je:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Pogledajmo sliku :



Vratimo se sada na rešavanje integrala:

$$I=\int_D 2(x-y)dxdy=\int_D(-v)dudv=-\int_1^3 du\int_{-1}^1 vdv=-\int_1^3 \frac{v^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} du=0$$

8. Izračunati krivolinijski integral $\int_c xy[(-\frac{x}{2}+y)dy-(x+\frac{y}{2})dx]$ gde je c kružnica $x^2+y^2=r^2$.

Rešenje:

Vama za trening ostavljamo da ovaj integral rešite DIREKTNO, a mi ćemo ga rešiti upotrebom **Grinove formule**.

Primetimo najpre da zadati integral nije u obliku gde možemo pročitati P(x,y) i Q(x,y) pa ćemo najpre malo da ga prisredimo:

$$\int_c xy[(-\frac{x}{2}+y)dy-(x+\frac{y}{2})dx]=$$

$$\int_c(-\frac{x^2y}{2}+xy^2)dy-(x^2y+\frac{xy^2}{2})dx=$$

$$\int_c(-x^2y-\frac{xy^2}{2})dx+(-\frac{x^2y}{2}+xy^2)dy=$$

Odavde je:

$$P(x,y)=-x^2y-\frac{xy^2}{2}\to\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2-\frac{2xy}{2}=-x^2-xy$$

$$Q(x,y)=-\frac{x^2y}{2}+xy^2\to\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xy}{2}+y^2=y^2-xy$$

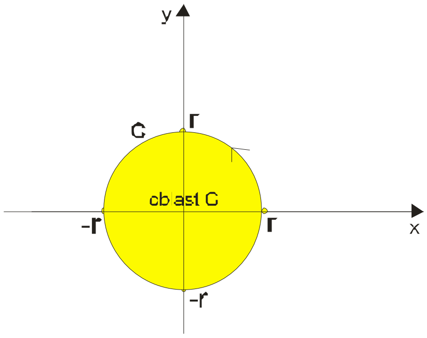
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2-xy-\left(-x^2-xy\right)=y^2-xy+x^2+xy=\boxed{x^2+y^2}$$

Dakle, posao nam je da rešimo: $I=\int_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$

Naravno, u ovoj situaciji prelazimo na polarne koordinate:

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = R\sin\varphi$$
$$|J| = R \qquad \text{gde} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \to R^2 = r^2 \to R = r$$

Pogledajmo sliku.



Sad rešavamo:

$$I = \int_G \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \iint_G R^2 \cdot |J|\, dRd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r R^2 \cdot RdR = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}\Bigg|_0^r = \boxed{\frac{r^4\pi}{2}}$$