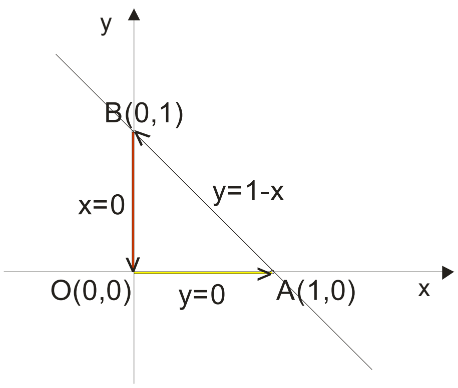
KRIVOLINIJSKI INTEGRALI – ZADACI (II DEO)

Krivolinijski integrali druge vrste

1. Izračunati krivolinijski integral $\int\limits_c \left(-\frac{y}{x+y}\right)dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)dy$ ako je c kontura trougla koji obrazuje prava x + y = 1 sa koordinatnim osama.

Rešenje:

Pogledajmo najpre sliku:



Pošto krivolinijski integral II vrste zavisi od putanje integracije, moramo raditi u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu.

I ovde ćemo uočiti tri dela.

<u>**OA**</u> (Od tačke O(0,0) do tačke A(1,0))

Ovde se radi o pravoj y = 0 (x osa) pa je tu vrednost integrala očigledno 0

<u>**AB**</u> (Od tačke A(1,0) do tačke B(0,1))

Možemo ga rešavati po x ili po y. Mi ćemo vam pokazati obe situacije , samo pazite jer formulice nisu iste!

<u>**Ako radimo po x.**</u>

Ako je kriva c zadata u ravni y=y(x) i $a \le x \le b$ tada je:

$$\int\limits_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y_x^`]dx$$

Ovde je očigledno $1 \le x \le 0$ i još je $y = 1 - x \to y` = -1$, pa imamo:

$$\int\limits_{AB} \left(-\frac{y}{x+y}\right)dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)dy =$$

$$\int\limits_{AB} \left(-\frac{1-x}{x+1-x} + \frac{x}{x+1-x}\cdot(-1)\right)dx = \int\limits_1^0 (-1+x-x)dx = -1\cdot\int\limits_1^0 dx = -1(0-1) = 1$$

Ako radimo po y.

Ako je kriva zadata u ravni x=x(y) i $m \le y \le n$ tada je :

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_m^n [P(x(y),y)x_y^{`} + Q(x(y),y)]dy$$

Ovde je očigledno $0 \le y \le 1$ i još je $x = 1 - y \to x` = -1$, pa imamo:

$$\int_{AB}\left(-\frac{y}{x+y}\right)dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)dy =$$

$$\int_{AB}\left(-\frac{y}{1-y+y}\cdot(-1) + \frac{1-y}{1+y-y}\right)dy = \int_0^1 (y+1-y)dy = \int_0^1 dy = 1$$

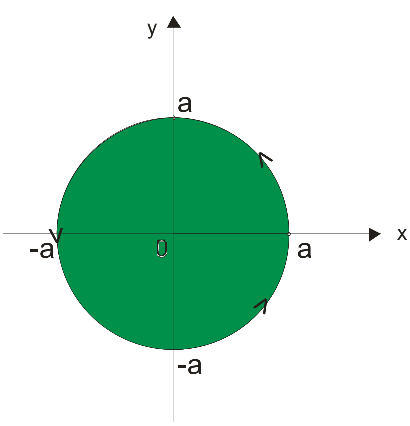
BO

U pitanju je sada prava x = 0 (y osa) pa je vrednost integrala i ovde očigledno 0.

Konačno rešenje je dakle 1.

2. Izračunati krivolinijski integral $\int_c x^3 dy - y^3 dx$ ako je c kontura kruga $x^2 + y^2 = a^2$.

Rešenje:



Uzmemo da je: $x = a\ cos\ t$ i $y = a\ sin\ t$. Ovo očigledno zadovoljava da je $x^2 + y^2 = a^2$.

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \to x` = -a\sin t \\ y &= a\sin t \to y` = a\cos t \end{aligned} \quad \text{i} \quad 0 \le t \le 2\pi \text{ jer obilazimo ceo krug.}$$

Koristimo formulu:

$$\int_c P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t),y(t))x_t^` + Q(x(t),y(t))y_t^`]dt$$

$$\int_c x^3 dy - y^3 dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \left((a\cos t)^3 \cdot a\cos t - (a\sin t)^3 \cdot (-a\sin t) \right) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(a^4 \cos^4 t + a^4 \sin^4 t \right) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t \right) dt =$$

Ove integrale možemo rešavati na više načina, al mislimo da je najbolje da iskoristimo trigonometrijske formulice:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{............................} / ()^2$$
$$\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = 1$$
$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{2}$$
$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

vratimo se u zadatak:

$$a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t \right) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x \right) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} \right) dt =$$

$$= a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4} + \underbrace{\boxed{\frac{\cos 4x}{4}}}_{\text{ovo je 0 sa datim granicama}} \right) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} dt = \frac{3}{4} a^4 \cdot 2\pi = \boxed{\frac{3a^4\pi}{2}}$$

3.

Izračunati krivolinijski integral $\int_c x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$ **gde je c deo prave od tačke (3,2,1) do tačke (0,0,0)**

Rešenje:

Da se podsetimo:

Jednačina prave kroz dve date tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ je :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Kod nas je to : $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{1-0}\to\boxed{\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}}$ pa je prebacimo u parametarski oblik:

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=t$

$x=3t\to x`=3$

$y=2t\to y`=2$

$z=1t\to z`=1$

i važi da je

$x=3t\to$ za x=3 je t=1 $\to$ za x=0 je t=0

$y=2t\to$ za y=2 je t=1 $\to$ za y=0 je t=0 $\to\to\to\to$ $\boxed{1\le t\le 0}$

$z=t\to$ za z=1 je t=1 $\to$ za z=0 je t=0

i) Ako je kriva c zadata parametarskim jednačinama:

x=x(t)
y=y(t) gde je $t_0\le t\le t_1$ tada je:
z=z(t)

$$\int_c P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_{t_0}^{t_1}[P(x(t),y(t),z(t))x_t^{`}+Q(x(t),y(t),z(t))y_t^{`}+R(x(t),y(t),z(t))z_t^{`}]dt$$

$$\int_c x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz=$$

$$\int_1^0[(3t)^3\cdot x`+3\cdot t\cdot(2t)^2\cdot y`-(3t)^2\cdot 2t\cdot z`]dt=$$

$$\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3\cdot t\cdot(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t\cdot 1]dt=$$

$$\int_1^0[(81t^3+24t^3-18t^3]dt=\int_1^0 87t^3dt=87\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_1^0=87\cdot(-\frac{1}{4})=\boxed{-\frac{87}{4}}$$

4.

Izračunati krivolinijski integral $\int_c ydx+zdy+xdz$ **gde je** c **dobijena u preseku** $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ x^2=Rz\end{cases}$

Rešenje:

Iz $x^2+y^2=R^2$ zaključujemo da je :

$x=R\cos t$

$y=R\sin t$

a kad ovo zamenimo u $x^2=Rz\to z=\frac{x^2}{R}=\frac{R^2\cos^2 t}{R}\to\boxed{z=R\cos^2 t}$

Sad imamo:

$x=R\cos t\to x`=-R\sin t$

$y=R\sin t\to y`=R\cos t$ i $0\le t\le 2\pi$

$z=R\cos^2 t\to z`=R\cdot 2\cos t(\cos t)`=R\cdot 2\cos t(-\sin t)=-2R\cdot\sin t\cos t$

$$\int_0^{2\pi} [P(x(t),y(t),z(t))x_t^` + Q(x(t),y(t),z(t))y_t^` + R(x(t),y(t),z(t))z_t^`]dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-R^2\sin^2 t + R^2\cos^3 t - R^2\cos t \cdot 2\sin t\cos t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-R^2\sin^2 t + R^2\cos^3 t - R^2 \cdot 2\sin t\cos^2 t)dt =$$

$$R^2 \cdot \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t \cdot \cos t - 2\sin t\cos^2 t)dt =$$

$$R^2 \cdot \left(-\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt + \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t dt - 2\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t dt \right) =$$

Ovo su sve obični integrali, pažljivim rešavanjem dobijamo rešenje: $\boxed{-R^2\pi}$

5. Izračunati krivolinijski integral $\int_c (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ **gde je kriva c zadata sa** $|x-1|+|y-1|=1$ **.**

Rešenje:

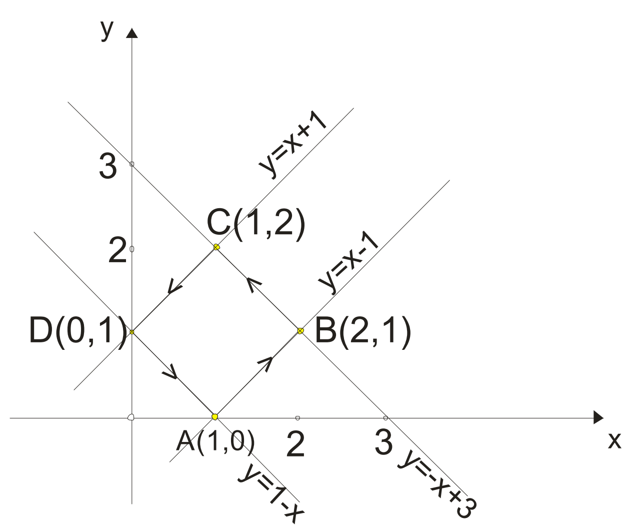
Najpre da analiziramo zadatu krivu i nacrtamo sliku:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, x \ge 1 \\ 1-x, x<1 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad |y-1| = \begin{cases} y-1, y \ge 1 \\ 1-y, y<1 \end{cases}$$

Sad odredimo koje prave imamo:

$$x \ge 1 \wedge y \ge 1 \to x-1+y-1=1 \to x+y=3$$
$$x \ge 1 \wedge y < 1 \to x-1-y+1=1 \to x-y=1$$
$$x < 1 \wedge y \ge 1 \to -x+1+y-1=1 \to -x+y=1$$
$$x < 1 \wedge y < 1 \to -x+1-y+1=1 \to x+y=1$$

Pogledajmo sliku:



Ideja je : $\int\limits_{c} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$

AB

$y = x-1 \to y` = 1 \wedge 1 \le x \le 2$

$$\int\limits_{AB} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy =$$

$$\int\limits_{AB} \left((x^2+(x-1)^2)+(x^2-(x-1)^2)\cdot 1\right)dx =$$

$$\int\limits_{1}^{2} \left(x^2+x^2-2x+1+x^2-x^2+2x-1\right)dx = \int\limits_{1}^{2}\left(2x^2\right)dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2} = 2\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = 2\cdot\frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

BC

$y = 3-x \to y` = -1 \wedge 2 \ge x \ge 1$

$$\int\limits_{BC} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy =$$

$$\int\limits_{2}^{1} \left((x^2+(3-x)^2)+(x^2-(3-x)^2)\cdot(-1)\right)dx = -\frac{14}{3}$$

CD

$y = 1+x \to y` = 1 \wedge 1 \ge x \ge 0$

$$\int\limits_{CD} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy =$$

$$\int\limits_{CD} \left((x^2+(1+x)^2)+(x^2-(1+x)^2)\cdot 1\right)dx =$$

$$\int\limits_{1}^{0} \left(x^2+x^2+2x+1+x^2-x^2-2x-1\right)dx = \int\limits_{1}^{0}\left(2x^2\right)dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{0} = 2\left(\frac{0^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = -2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

DA

$y = 1-x \to y` = -1 \wedge 0 \le x \le 1$

$$\int\limits_{DA} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy =$$

$$\int\limits_{0}^{1} \left((x^2+(1-x)^2)+(x^2-(1-x)^2)\cdot(-1)\right)dx = \frac{2}{3}$$

I sad kad saberemo sve ove integrale dobijamo

$$\int\limits_{c} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = \frac{14}{3} - \frac{14}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

6. Izračunati krivolinijski integral $\int_c (4y^2+2x^2)dx+(z+x)dy+ydz$ **gde je c zadato sa** $\begin{cases} x^2+y^2=4-z \\ y^2=z \end{cases}$

Rešenje:

Kriva ***c*** **je data u prostoru kao presek ove dve površi. Šta raditi u takvoj situaciji?**

Eliminišemo promenljivu z **iz datih jednačina (to jest nadjemo projekciju krive** c **na xOy ravan).**

Odatle uvedemo smenu i predjemo u parametarske jednačine. Vratimo se u neku od početnih jednačina i tu dobijemo i treću promenljivu u parametarskom obliku.

$$\begin{cases} x^2+y^2=4-z \\ y^2=z \end{cases} \to \begin{cases} -x^2-y^2+4=z \\ y^2=z \end{cases} \to -x^2-y^2+4=y^2 \to x^2+2y^2=4........./:4$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \to \boxed{x=2\cos t} \wedge \boxed{y=\sqrt{2}\sin t} \to y^2=z \to \boxed{z=2\sin^2 t}$$

Sada je:

$$x=2\cos t \to x`=-2\sin t$$

$$y=\sqrt{2}\sin t \to y`=\sqrt{2}\cos t$$

$$z=2\sin^2 t \to z`=4\sin t\cos t$$

Naravno i ovde je $0\le t\le 2\pi$

$$\int_c (4y^2+2x^2)dx+(z+x)dy+ydz=$$

$$\int_0^{2\pi}\{[4(\sqrt{2}\sin t)^2+2(2\cos t)^2]\cdot x`+[2\sin^2 t+2\cos t]\cdot y`+\sqrt{2}\sin t\cdot z`\}dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\{[8\sin^2 t+8\cos^2 t]\cdot(-2\sin t)+[2\sin^2 t+2\cos t]\cdot(\sqrt{2}\cos t)+\sqrt{2}\sin t\cdot(4\sin t\cos t)\}dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\{-16\sin t+2\sqrt{2}\sin^2 t\cos t+\boxed{2\sqrt{2}\cos^2 t}+4\sqrt{2}\sin^2 t\cos t\}dt=$$

U prethodnim primerima smo već videli da svi integrali sem zaokruženog daju 0 u granicama od 0 do 2π **.**

Neki profesori dozvoljavaju ovu «brzinu» kad prepoznamo takav integral a neki pak traže da se radi postupno, kao i uvek naš savet je da poslušate svog profesora i radite kako on zahteva....

$$=\int_0^{2\pi}\boxed{2\sqrt{2}\cos^2 t}dt=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\boxed{2\pi\sqrt{2}}$$

7. Izračunati krivolinijski integral $\int\limits_c (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$ **gde je c presečna tačka površi** $z=4-x^2-2y^2$ **i ravni** $x+2y+z=1$

Rešenje:

Postupak je sličan kao u prethodnom primeru. Najpre projekcija krive na xOy ravan:

$$\left.\begin{array}{l} z=4-x^2-2y^2 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} z=4-x^2-2y^2 \\ z=1-x-2y \end{array}\right\}$$

$$4-x^2-2y^2=1-x-2y$$

$$x^2+2y^2+1-x-2y-4=0$$

$$x^2-x+2y^2-2y=3$$

$$\boxed{x^2-x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+2\left(\boxed{y^2-y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\right)=3$$

$$(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+2(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=3$$

$$\boxed{(x-\frac{1}{2})^2+2(y-\frac{1}{2})^2=\frac{15}{4}}$$

Ovde uzimamo odgovarajuće smene da jednakost bude zadovoljena (to jest prelazimo u parametarske jednačine)

$$\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\sin t \end{array} \quad \textbf{a iz} \quad z=1-x-2y \quad \textbf{imamo} \quad z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\sin t$$

Odavde je :

$$\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t \rightarrow x`=-\frac{\sqrt{15}}{2}\sin t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\sin t \rightarrow y`=\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\cos t \qquad\qquad \text{i} \quad 0\le t\le 2\pi \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\sin t \rightarrow z`=\frac{\sqrt{15}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\cos t \end{array}$$

Dati krivolinijski integral smo sveli na običan odredjeni integral po promenljivoj t.

$\int\limits_c (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=$ **zamenimo sve redom i posle sredjivanja dobijemo rešenje** $\boxed{-15\pi\sqrt{2}}$