TROSTRUKI INTEGRALI

1. DIREKTNO RAČUNANJE

Ako je funkcija f(x,y,z) neprekidna u oblasti V koja je određena sa:

$$\begin{cases} x_1 \le x \le x_2 \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases} \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

2. CILINDRIČNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,drd\varphi dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r rdr \int_{z_1}^{z_2} fdz$$

$|J| = r$

3. SFERNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$|J| = r^2\sin\theta$ Odavde je $x^2+y^2+z^2 = r^2$

Uglove φ i θ određujemo iz zadatka i vodimo računa da je najčešće :

$r \ge 0; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \pi$

Možemo koristiti(u zavisnosti od situacije) i modifikovane sferne koordinate:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

$|J| = abcr^2\sin\theta$

A u situaciji kad je zadata površ baš "zeznuta" možemo koristiti i sledeće smene:

$$\begin{cases} x = ar\cos^{\beta}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ y = br\sin^{\beta}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ z = cr\cos^{\alpha}\theta \end{cases}$$

Jakobijan u ovoj situaciji računamo:

$$|J| = abcr^2\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi$$

Osnovna perioda je $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$

PRIMENA TROSTRUKOG INTEGRALA ZA RAČUNANJE ZAPREMINE:

$$\mathbf{V} = \iiint_V dxdydz \qquad \text{po oblasti V}$$