KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

1) Krivolinijski integral prve vrste

i) Ako je f(x,y,z) definisana i neprekidna u svakoj tački deo po deo glatke krive c date sa:
x=x(t)
y=y(t) gde je $t_1 \le t \le t_2$, i ds- diferencijal luka krive
z=z(t)
tada se krivolinijski integral prve vrste izračunava po formuli:

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{(x_t^{`})^2+(y_t^{`})^2+(z_t^{`})^2}\,dt$$

Ovaj integral ne zavisi od orijentacije krive!

ii) Ako je kriva data u obliku c: y=y(x) $a \le x \le b$ tada je:

$$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y_x^{`})^2}\,dx$$

iii) Ako je kriva data u obliku c: x=x(y) i $m \le y \le n$ tada je :

$$\int_c f(x,y)ds = \int_m^n f(x(y),y)\sqrt{1+(x_y^{`})^2}\,dy$$

Izračunavanje dužine krive c : **S =** $\int_c ds$

2. Krivolinijski integral druge vrste

i) Ako je kriva c zadata parametarskim jednačinama:

x=x(t)
y=y(t) gde je $t_0 \le t \le t_1$ tada je:
z=z(t)

$$\int_c P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \int_{t_0}^{t_1}[P(x(t),y(t),z(t))x_t^{`}+Q(x(t),y(t),z(t))y_t^{`}+R(x(t),y(t),z(t))z_t^{`}]dt$$

ii) Ako je kriva c zadata u ravni y=y(x) i $a \le x \le b$ tada je:

$$\int_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y_x^{`}]dx$$

iii) Ako je kriva zadata u ravni x=x(y) i $m \le y \le n$ tada je :

$$\int_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_m^n [P(x(y),y)x_y^{`}+Q(x(y),y)]dy$$

PAZI: Krivolinijski integral druge vrste zavisi od orijentacije krive . Pozitivan smer je smer suprotan kretanju kazaljke na časovniku. $\int_{C^+} = -\int_{C^-}$

Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ ne zavisi od putanje integracije

2) Postoji funkcija u=u(x,y) tako da je du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz i tada važi :
$\int_A^B$ P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(B) - u(A)

3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

4) $\int_C$ P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 ako je kriva c zatvorena.

Grinova formula:

Ako kriva C ograničava oblast D (to jest ona je rub oblasti D) pri čemu D ostaje sa leve strane prilikom obilaska krive C, i važi da su funkcije P,Q,R neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi formula:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Iz Grinove formule se lako dokazuje da je **površina oblasti P(D)** koja je ograničena krivom C data formulom:

$$\text{P(D)}= \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$