DVOSTRUKI INTEGRALI

1. DIREKTNO IZRAČUNAVANJE

Ako je oblast D određena nejednakostima :

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases} \qquad \text{onda je:} \qquad \iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy$$

Ako je oblast D određena nejednakostima:

$$\begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases} \qquad \text{onda je :} \qquad \iint_D z(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx$$

2. OPŠTE KOORDINATE

Ako se sa x=x(u,v) i y=y(u,v) , gde su ovo neprekidne i diferencijabilne funkcije , realizuje jednoznačno preslikavanje ograničene i zatvorene oblasti D u ravni xOy na oblast D\` u ravni uOv i ako je:

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \ne 0$$

Onda važi formula:

$$\iint_D z(x,y)dxdy = \iint_{D`} z[x(u,v),y(u,v)]|J|dudv$$

3. POLARNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \end{cases} \quad \text{onda je :} \quad \iint_D z(x,y)dxdy = \iint_{D`} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

4. ELIPTIČKE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = a\, r \cos\varphi \\ y = b\, r \sin\varphi \quad \text{onda je:} \quad \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^r z(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,abr\,dr \\ |J| = abr \end{cases}$$

PRIMENA DVOSTRUKIH INTEGRALA

i) Izračunavanje površine površi

Ako je površ zadata jednačinom z = z(x,y) i ako obeležimo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ onda je:

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy$$

Ako je površ zadata parametarskim jednačinama x=x(u,v) i y=y(u,v) onda je:

$$P = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv \qquad \text{gde je:}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Izračunavanje zapremine

Zapremina cilindra, koji odozgo ograničava neprekidna površ definisana jednačinom z=z(x,y), odozdo ravan z=0 , a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D, data je formulom:

$$V = \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy$$