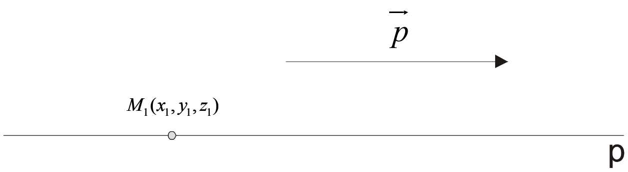
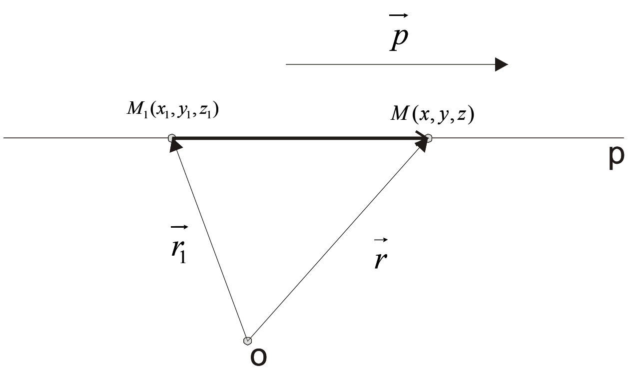
PRAVA

Prava je kao i ravan osnovni geometrijski pojam i ne definiše se.

Prava je u prostoru određena jednom svojom tačkom i vektorom paralelnim sa tom pravom (vektor paralelnosti).



Posmatrajmo pravu p , tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ koja joj pripada . Neka tačka M(x,y,z) $\in R^3$.



Očigledno je da tačka M(x,y,z) pripada pravoj p ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{M_1M}$ i $\vec{p}$ kolinearni!

Kako je $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$ možemo zapisati :

$(\vec{r} - \vec{r_1}) \times \vec{p} = 0$ ili

$(\vec{r} \times \vec{p}) - (\vec{r_1} \times \vec{p}) = 0$ ako obeležimo da je $\vec{r_1} \times \vec{p} = \vec{b}$

$\boxed{\vec{r} \times \vec{p} = \vec{b}}$

Dobili smo vektorsku jednačinu prave.

A možemo razmišljati i ovako :

Kako smo zaključili da su vektori $\overrightarrow{M_1M}$ i $\vec{p}$ kolinearni, to se oni mogu izraziti jedan preko drugog uz pomoć nekog parametra t.

$\vec{r}-\vec{r_1}=t\vec{p}$

$\boxed{\vec{r}=\vec{r_1}+t\vec{p}}$ ovo je vektorska jednačina prave kroz datu tačku u pravcu vektora $\vec{p}$

Ako uzmemo da vektor $\vec{p}$ ima koordinate $\vec{p}=(l,m,n)$, onda je :

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_1+t\cdot l\\ y&=y_1+t\cdot m\\ z&=z_1+t\cdot n\end{aligned}}$$

parametarski oblik jednačine prave

Ovaj parametarski oblik najčešće koristimo kad tražimo prodor prave kroz ravan ili tačku preseka dve prave.

Odavde možemo izvesti oblik koji se najčešće koristi u zadacima (simetrični oblik)

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

Vrlo sličan ovom obliku je i jednačina prave kroz dve date tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Primer 1.

Napisati jednačinu prave kroz tačke A(1,2,0) i B(2,3,4) i prebaciti je u parametarski oblik.

<u>*Rešenje*</u>

Koristimo $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-0}{4-0}$$
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$$

Odavde se vidi da je vektor paralelnosti prave $\vec{p}=(1,1,4)$

Prebacimo je sada u parametarski oblik:

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}=t\to\frac{x-1}{1}=t$ i $\frac{y-2}{1}=t$ i $\frac{z}{4}=t$ pa je

$$x=t+1$$
$$y=t+2$$
$$z=4t$$

Često se u zadacima daje i *opšta* jednačina prave, to jest prava određena presekom dve ravni:

$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Kako preći iz ovog oblika u simetrični ? (jer iz simetričnog oblika lako "čitamo'' i tačku i vektor paralelnosti)

Najpre nadjemo vektor paralelnosti:

$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$
$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

$$\vec{p} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Zatim rešavamo sistem :

$$\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \hline \end{array}$$

Odavde dobijamo x_1, y_1, z_1 (često se jedna nepoznata uzima proizvoljno , pa se druge dve dobijaju iz nje...)

Sve zamenimo u $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$.

Primer 2.

Pravu $\{ \begin{array}{c} x - 2y + 3z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{array}$ prebaciti u simetrični oblik.

<u>*Rešenje*</u>

$\{ \begin{array}{c} x - 2y + 3z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{array}$ Najpre " pročitamo" vektore normalnosti za ravni…

$x - 2y + 3z = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (1, -2, 3)$
$x + z - 4 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_2} = (1, 0, 1)$

Dalje tražimo njihov vektorski proizvod:

$$\vec{p}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}(-2-0)-\vec{j}(1-3)+\vec{k}(0+2)=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(-2,2,2)$$

Ovde možemo zapisati i da je :

$\vec{p}=(-2,2,2)=2(-1,1,1)$, odnosno uzeti da je vektor (-1,1,1).

Da bi našli tačku koja pripada toj pravoj moramo rešiti sistem:

$$x-2y+3z=0$$
$$\underline{x+z-4=0}\rightarrow z=4-x$$
$$x-2y+3(4-x)=0$$
$$x-2y+12-3x=0$$
$$-2x-2y+12=0...../:(-2)$$
$$\underline{x+y-6=0\rightarrow y=6-x}$$
$$z=4-x$$
$$\underline{y=6-x}$$

Ovde možemo uzeti proizvoljno x, recimo x = 0, pa je onda:

$$z=4-x\rightarrow z=4-0\rightarrow z=4$$
$$y=6-x\rightarrow y=6-0\rightarrow y=6$$

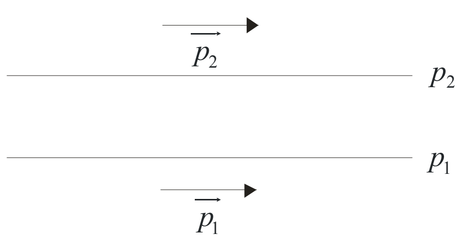
Dakle dobili smo tačku $(x_1,y_1,z_1)=(0,6,4)$

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$
$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-4}{1}$$

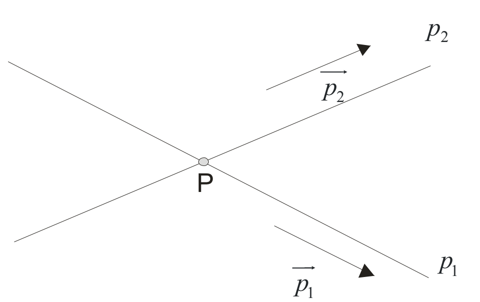
Kakav može biti uzajamni položaj dve prave?

U prostoru prave mogu pripadati ili ne pripadati istoj ravni.

Ako pripadaju istoj ravni onda su ili paralelne ili se seku.

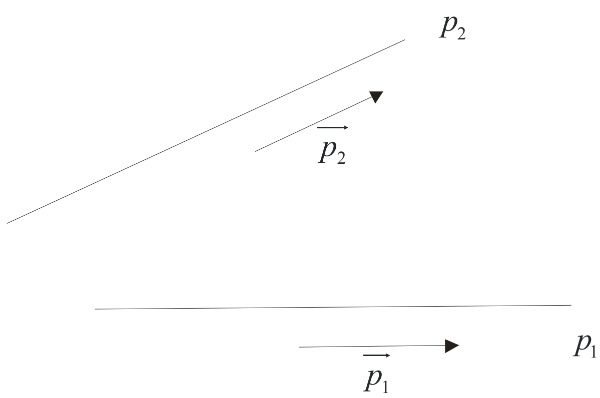


paralelne prave



prave se seku u tački P

Ako prave ne pripadaju istoj ravni onda kažemo da su mimoilazne.



Posmatrajmo dve prave :

$$p_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Prave pripadaju istoj ravni i paralelne su ako i samo ako su njihovi vektori pravaca $\overrightarrow{p_1}=(l_1,m_1,n_1)$ i $\overrightarrow{p_2}=(l_2,m_2,n_2)$

kolinearni, to jest ako i samo ako važi $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (uslov paralelnosti)

Specijalno, **prave se poklapaju** ako važi da je $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ i $\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{n_1}$

Kako da znamo da li se prave seku?

Tu nam pomaže takozvani **uslov preseka** : $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

Naravno, prave su **mimoilazne** ako je $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0$

Primer 3.

Date su prave $p_1: \quad \frac{x-2}{t}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$ i $p_2: \quad \frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$

Odrediti parametar t tako da se prave seku i nadji tačku preseka.

Rešenje

Najpre ćemo iz datih jednačina pravih pročitati tačke koje im pripadaju i vektore pravaca (paralelnosti).

$$\frac{x-2}{t}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0} \to \quad P_1(2,1,2) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{p_1}=(t,1,0)$$

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1} \to \quad P_2(5,2,3) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{p_2}=(2,3,1)$$

Dalje koristimo uslov preseka:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 5-2 & 2-1 & 3-2 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \textit{Sarusovo pravilo} \to \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ t & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}=3+0+3t-t-0-2=0$$

$$2t+1=0 \to \boxed{t=-\frac{1}{2}}$$

Dakle $\quad \frac{x-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0} \to \quad P_1(2,1,2) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{p_1}=(-\frac{1}{2},1,0)$ je prva prava.

Da bi našli njihov presek, prave ćemo prebaciti u parametarski oblik.

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}=\alpha \to \text{x}=-\frac{1}{2}\alpha+2,\ \text{y}=1\alpha+1,\ \text{z}=0\alpha+2$$

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}=\beta \to \ \text{x}=2\beta+5,\ \ \text{y}=3\beta+2,\ \ \text{z}=1\beta+3$$

Sad uporedjujemo x = x, y =y , z = z da bi našli vrednost za α ili β

Vidimo da je najlakše to postići iz z = z. Dakle $z=z \to 2=\beta+3 \to \beta=-1$

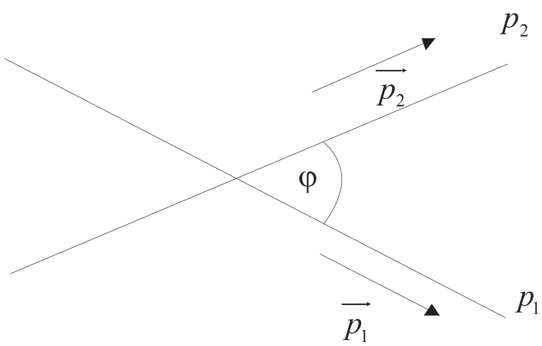
Vratimo vrednost za β i dobijamo:

$$\text{x}=2\beta+5,\ \ \text{y}=3\beta+2,\ \ \text{z}=1\beta+3 \to$$
$$x=2(-1)+5=3; y=3(-1)+2=-1; z=1(-1)+3=2$$

$P(3,-1,2)$ je tačka preseka!

Kako naći ugao između dve prave?

Ugao pod kojim se prave seku je ugao između njihovih vektora pravaca.



$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}}{\left|\overrightarrow{p_1}\right|\left|\overrightarrow{p_2}\right|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}}$$