SVODJENJE NA KANONSKI OBLIK
(KRIVE DRUGOG REDA)

ZADACI

1. Sledeću jednačinu svesti na kanonski oblik i odrediti koja kriva je njome određena:

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 2 = 0$$

Rešenje:

Datu jednačinu upoređujemo sa $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, pa je :

$$\left.\begin{array}{l} A = 2 \\ 2B = 5 \\ C = 2 \\ 2D = 0 \\ 2E = 0 \\ F = -2 \end{array}\right\} \text{Odavde je dakle : } A = 2;\ B = \frac{5}{2};\ C = 2;\ D = 0;\ E = 0;\ F = -2$$

Pošto je **D= E = 0,** zaključujemo da kriva ima centar u (0,0) . **[pogledaj fajl sa postupkom]**

Dakle, odmah **vršimo rotaciju**!

$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B}$ pa je $ctg2\alpha = \frac{2-2}{2\frac{5}{2}}$, pa je $ctg2\alpha = 0$, odnosno $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, odakle je $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Kad je A=C , u sledećim primerima, odmah možemo zaključiti da je $\alpha = \frac{\pi}{4}$; **zapamti!**

Upotrebljavamo formule rotacije:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{array}$$

Vraćamo se u zadatak i menjamo x i y :

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 2 = 0$$

$$2[\frac{\sqrt{2}}{2}(x` - y`)]^2 + 5\frac{\sqrt{2}}{2}(x` - y`)\frac{\sqrt{2}}{2}(x` + y`) + 2[\frac{\sqrt{2}}{2}(x` + y`)]^2 - 2 = 0$$ **sredjujemo…**

$$2[\frac{2}{4}(x`^2 - 2x`y` + y`^2)] + 5\frac{2}{4}(x`^2 - y`^2) + 2[\frac{2}{4}(x`^2 + 2x`y` + y`^2)] - 2 = 0$$

$$x`^2 - 2x`y` + y`^2 + \frac{5}{2}x`^2 - \frac{5}{2}y`^2 + x`^2 + 2x`y` + y`^2 - 2 = 0$$

$$\frac{9}{2}x`^2 - \frac{1}{2}y`^2 = 2$$ **podelimo sa 2**

$$\frac{9}{4}x`^2 - \frac{1}{4}y`^2 = 1$$ **kao trikče spustimo 9 ispod 4**

$$\frac{x`^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y`^2}{4} = 1$$ **ovo je jednačina hiperbole!** $a^2 = \frac{4}{9}$ **i** $b^2 = 4$

Ne moramo vršiti translaciju, jer smo već došli do rešenja! [pogledaj fajl postupak]

---

2. Jednačinu svesti na kanonski oblik i odrediti koja kriva je njome određena:

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

Rešenje:

Upoređujemo $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$ sa $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ pa je

$$\left.\begin{array}{l} A = 7 \\ 2B = 6 \\ C = -1 \\ 2D = 28 \\ 2E = 12 \\ F = 28 \end{array}\right\}$$ odavde je **A=7; B = 3; C = -1; D = 14; E = 6, F = 28**

Proverimo da li kriva ima centar?

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + Cb + E = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 7a + 3b + 14 = 0 \\ 3a - b + 6 = 0 \end{array}\right\}$$ Rešenje ovog sistema je **a = - 2 i b = 0**

Dakle , kriva ima centar O(-2,0) pa prvo radimo translaciju:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = x` + a} \\ \mathbf{y = y` + b} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \mathbf{x = x` - 2} \\ \mathbf{y = y`} \end{array}\right\}$$ ovo zamenimo u datu jednačinu $\mathbf{7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0}$

$\mathbf{7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0}$

$\mathbf{7(x` - 2)^2 + 6(x` - 2)y` - y`^2 + 28(x` - 2) + 12y` + 28 = 0}$ sredimo…

$\mathbf{7(x`^2 - 4x` + 4) + 6x`y` - 12y` - y`^2 + 28x` - 56 + 12y` + 28 = 0}$

$\mathbf{7x`^2 + 6x`y` - y`^2 = 0}$ **“otarasili” smo se onih sa x i y što je i cilj translacije!**

Dalje nastavljamo sa rotacijom!

$$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B} \quad \text{pa je} \quad ctg2\alpha = \frac{7+1}{6} \quad \text{to jest} \quad ctg2\alpha = \frac{4}{3}$$

Evo one situacije kada ne možemo odmah odrediti ugao….idemo preko trigonometrijskih formula:

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} \quad \text{to jest} \quad \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{4}{3} \quad \text{pa je odavde} \quad 3ctg^2\alpha - 8\,ctg\alpha - 3 = 0$$

$3ctg^2\alpha - 8\,ctg\alpha - 3 = 0$ uzimamo smenu $ctg\,\alpha = t$

$3t^2 - 8t - 3 = 0$ Rešenja ove kvadratne jednačine su : $t_1 = 3$ i $t_2 = -\frac{1}{3}$

Vratimo se u smenu: $ctg\alpha = 3$ ili $ctg\,\alpha = -\frac{1}{3}$

Ako je $ctg\,\alpha = 3$

Iskoristićemo formulice $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ i $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3$ pa je $\cos\alpha = 3\sin\alpha$ i to zamenimo u $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + (3\sin\alpha)^2 = 1$

$10\sin^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ vratimo se u $\cos\alpha = 3\sin\alpha$ pa je $\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

Dakle odavde su rešenja : $(\sin\alpha, \cos\alpha) = (+\frac{1}{\sqrt{10}}, +\frac{3}{\sqrt{10}})$ i $(\sin\alpha, \cos\alpha) = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$

Ako je ctg $\alpha = -\frac{1}{3}$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{3}$ pa je $\sin\alpha = -3\cos\alpha$

$(-3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$10\cos^2\alpha = 1$ to jest $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ pa to zamenimo u $\sin\alpha = -3\cos\alpha$ i dobijamo $\sin\alpha = \mp\frac{3}{\sqrt{10}}$

Odavde su rešenja: $(\sin\alpha, \cos\alpha) = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, +\frac{1}{\sqrt{10}})$ i $(\sin\alpha, \cos\alpha) = (\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$

Sve mogućnosti su $(+\frac{1}{\sqrt{10}}, +\frac{3}{\sqrt{10}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$, $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, +\frac{1}{\sqrt{10}})$ i $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$

Od ove četiri mogućnosti , prva nama odgovara! Zašto?

Podsetite se trigonometrijskog kruga i imajte na umu činjenicu da ugao $\alpha \in (0, \pi)$! (fajl iz druge godine, ovde na sajtu, naravno)

Dakle : sin $\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ i cos $\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Dalje koristimo formule rotacije:

$$\left.\begin{aligned} x` &= x``\cos\alpha - y``\sin\alpha \\ y` &= x``\sin\alpha + y``\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x` &= \frac{3}{\sqrt{10}}x`` - \frac{1}{\sqrt{10}}y`` \\ y` &= \frac{1}{\sqrt{10}}x`` + \frac{3}{\sqrt{10}}y`` \end{aligned}\right\}$$

ovo menjamo u $7x`^2 + 6x`y` - y`^2 = 0$

$7x`^2 + 6x`y` - y`^2 = 0$

$$7\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x`` - \frac{1}{\sqrt{10}}y``\right)^2 + 6\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x`` - \frac{1}{\sqrt{10}}y``\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x`` + \frac{3}{\sqrt{10}}y``\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}x`` + \frac{3}{\sqrt{10}}y``\right)^2 = 0$$

Ovaj izraz ,naravno, sredimo…

$7x``^2 - 2y``^2 = 0$ je konačno rešenje!

Ono predstavlja dve prave koje se seku!

---

3. Sledeću jednačinu svesti na kanonski oblik i odrediti koja kriva je njome određena:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 13 = 0$$

Rešenje:

$$\left.\begin{matrix} A = 1 \\ 2B = -2 \\ C = 1 \\ 2D = -12 \\ 2E = 12 \\ F = -13 \end{matrix}\right\} \quad \text{odavde je} \quad \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = -6 \\ E = 6 \\ F = -13 \end{matrix}$$

Tražimo centar:

$$\left.\begin{matrix} Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + Cb + E = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} a - b - 6 = 0 \\ -a + b + 6 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Ovaj sistem ima beskonašno mnogo rešenja(iste jednačine) to jest $AC - B^2 = 0$

Dakle idemo u rotaciju…

$ctg 2\alpha = \frac{A - C}{2B}$ Kako su A i C jednaki ,to je $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} \\ \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{array}$$

$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 13 = 0$

$$[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')]^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + [\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')]^2 - 12\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') + 12\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') - 13 = 0$$

$$\frac{2}{4}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 2\frac{2}{4}(x'^2 - y'^2) + \frac{2}{4}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - 6\sqrt{2}(x' - y') + 6\sqrt{2}(x' + y') - 13 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - x'y' + \frac{1}{2}y'^2 - x'^2 + y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + x'y' + \frac{1}{2}y'^2 - 6\sqrt{2}x' + 6\sqrt{2}y' + 6\sqrt{2}x' + 6\sqrt{2}y' - 13 = 0$$

Posle skraćivanja dobijamo:

$2y'^2 + 12\sqrt{2}y' - 13 = 0$

Dakle, dobili smo kvadratnu jednačinu po y`. Probamo da li ona ima rešenja...Njena diskriminanta je :

$D = b^2 - 4ac$

$D = (12\sqrt{2})^2 - 4*2*(-13) = 288 + 104 = 392 > 0 \quad 392 = 196*2$

$y'_{1,2} = \frac{-12\sqrt{2} \pm 14\sqrt{2}}{4}$ **Pa je** $y'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **i** $y'_2 = \frac{-13\sqrt{2}}{2}$

Dakle radi se o dvema paralelnim pravama!

---

4. Jednačinu svesti na kanonski oblik i odrediti koja kriva je njome određena:

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$$

Rešenje:

A = 5; B = -1; C = 5; D = -2; E = 10 F = 20

$$\left.\begin{aligned} Aa + Bb + D &= 0 \\ Ba + Cb + E &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 5a - b - 2 &= 0 \\ -a + 5b + 10 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Rešenje je (0, -2)

Translacija:

$$\left.\begin{aligned} x &= x` \\ y &= y` - 2 \end{aligned}\right\}$$ Menjamo u datu jednačinu!

$$\mathbf{5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0}$$

$$\mathbf{5x`^2 - 2x`(y` - 2) + 5(y` - 2)^2 - 4x` + 20(y` - 2) + 20 = 0}$$

$$\mathbf{5x`^2 - 2x`y` + 4x` + 5y`^2 - 20y` + 20 - 4x` + 20y` - 40 + 20 = 0}$$ **potiremo...**

$$\mathbf{5x`^2 - 2x`y` + 5y`^2 = 0}$$

Rotacija :

Kako je A=C ugao je $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{aligned} x` &= x``\cos\alpha - y``\sin\alpha \\ y` &= x``\sin\alpha + y``\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x` &= x``\cos\frac{\pi}{4} - y``\sin\frac{\pi}{4} \\ y` &= x``\sin\frac{\pi}{4} + y``\cos\frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x` &= x``\frac{\sqrt{2}}{2} - y``\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x`` - y``) \\ y` &= x``\frac{\sqrt{2}}{2} + y``\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x`` + y``) \end{aligned}$$

$$\mathbf{5x`^2 - 2x`y` + 5y`^2 = 0}$$

$$\mathbf{5[\frac{\sqrt{2}}{2}(x` - y`)]^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x` - y`)\frac{\sqrt{2}}{2}(x` + y`) + 5[\frac{\sqrt{2}}{2}(x` + y`)]^2 = 0}$$

$$\mathbf{5\frac{2}{4}(x`^2 - 2x`y` + y`^2) - 2\frac{2}{4}(x`^2 - y`^2) + 5\frac{2}{4}(x`^2 + 2x`y` + y`^2) = 0}$$ **sredimo…**

$$\mathbf{4x``^2 + 6y``^2 = 0}$$

$\mathbf{2x``^2 + 3y``^2 = 0}$ **je konačno rešenje, koje predstavlja TAČKU!**

5. **Jednačinu svesti na kanonski oblik i odrediti koja kriva je njome određena:**

$$\mathbf{x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0}$$

Rešenje:

A = 1; B = 2; C = 4; D = 2; E = $\frac{1}{2}$ **; F = - 15**

$$\left.\begin{aligned} Aa + Bb + D &= 0 \\ Ba + Cb + E &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a + 2b + 2 &= 0 \\ 2a + 4b + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Nemoguć sistem! **Nema centar!**

Rotacija:

$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B}$ pa je $ctg2\alpha = \frac{1-4}{4}$ to jest $ctg2\alpha = -\frac{3}{4}$

$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$ to jest $\frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{-3}{4}$ pa je odavde $2ctg^2\alpha + 3ctg\alpha - 2 = 0$

$2ctg^2\alpha + 3ctg\alpha - 2 = 0$ smena $ctg\alpha = t$

$\mathbf{2t^2 + 3t - 2 = 0}$ kvadratna po t, a njena rešenja su : $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = -2$; vratimo se u smenu $ctg\alpha = t$

<u>**Za ctg** $\alpha = \frac{1}{2}$</u>

Iskoristićemo formulice $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ i $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}$ pa je $2\cos\alpha = \sin\alpha$ i to zamenimo u $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$5\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ vratimo se u $2\cos\alpha = \sin\alpha$ pa je $\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Dakle odavde su rešenja : $(\sin\alpha, \cos\alpha) = (+\frac{2}{\sqrt{5}}, +\frac{1}{\sqrt{5}})$ i $(\sin\alpha, \cos\alpha) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

Za **ctg** α **= - 2**

Koristeći isti postupak dobijamo rešenja :

$(\sin\alpha\,,\,\cos\alpha\,)=(+\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$ i $(\sin\alpha\,,\,\cos\alpha\,)=(-\frac{1}{\sqrt{5}},+\frac{2}{\sqrt{5}})$

Rešenje koje ćemo mi uzeti je $(\sin\alpha\,,\,\cos\alpha\,)=(+\frac{2}{\sqrt{5}},+\frac{1}{\sqrt{5}})$

Rotacija:

$$\left.\begin{aligned} x &= x`\cos\alpha - y`\sin\alpha \\ y &= x`\sin\alpha + y`\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}x` - \frac{2}{\sqrt{5}}y` \\ y &= \frac{2}{\sqrt{5}}x` + \frac{1}{\sqrt{5}}y` \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x` - 2y`) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x` + y`) \end{aligned}\right\} \text{ menjamo u:}$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$$

$$[\frac{1}{\sqrt{5}}(x` - 2y`)]^2 + 4\frac{1}{\sqrt{5}}(x` - 2y`)\frac{1}{\sqrt{5}}(2x` + y`) + 4[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x` + y`)]^2 + 4\frac{1}{\sqrt{5}}(x` - 2y`) + \frac{1}{\sqrt{5}}(2x` + y`) - 15 = 0$$

Sve ovo lepo sredimo, skratimo šta ima, i dobijamo:

$$5x`^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x` - \frac{7}{\sqrt{5}}y` - 15 = 0$$ **sve podelimo sa 5**

$$x`^2 + \frac{6}{5\sqrt{5}}x` - \frac{7}{5\sqrt{5}}y` - 3 = 0$$ **sad vršimo dopunu do punog kvadrata...( po x`)**

$$x`^2 + \frac{6}{5\sqrt{5}}x` + (\frac{3}{5\sqrt{5}})^2 - (\frac{3}{5\sqrt{5}})^2 - \frac{7}{5\sqrt{5}}y` - 3 = 0$$ **prva tri daju pun kvadrat!**

$$(x` + \frac{3}{5\sqrt{5}})^2 = \frac{7}{5\sqrt{5}}y` + \frac{384}{125}$$ **izvučemo** $\frac{7}{5\sqrt{5}}$ **kao zajednički na desnoj strani…**

$(x` + \frac{3}{5\sqrt{5}})^2 = \frac{7}{5\sqrt{5}}(y` + \frac{384}{125} / \frac{7}{5\sqrt{5}})$ **malo sredimo**

$(x` + \frac{3}{5\sqrt{5}})^2 = \frac{7}{5\sqrt{5}}(y` + \frac{384}{25} / \frac{7}{\sqrt{5}})$

$(x` + \frac{3}{5\sqrt{5}})^2 = \frac{7}{5\sqrt{5}}(y` + \frac{384\sqrt{5}}{175})$

SAD IZVRŠIMO TRANSLACIJU: (napravili smo šta je x`` i y``)

$x`` = x` + \frac{3}{5\sqrt{5}}$

$y`` = y` + \frac{384\sqrt{5}}{175}$

Tako da sada kriva postaje:

$x``^2 = \frac{7}{5\sqrt{5}} y``$ **a ovo je parabola!**
