Neprekidnost funkcije (teorija i zadaci)

Pisali ste nam da napravimo jedan tutorijal vezan za neprekidnost funkcija i o vrstama prekida.

Evo najpre nekoliko neizbežnih definicija i teoremica.

Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da je za svako x, koje zadovoljava uslov $|x-a| < \delta$, ispunjena nejednakost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, tada za funkciju *f* kažemo da je neprekidna u tački *x = a.*

Ovo je **definicija neprekidnosti.**

Neki profesori vole sledeću **definiciju**:

Ako funkcija $x \to f(x)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$ i ako je ona jednaka $f(a)$, za funkciju f kažemo da je neprekidna u tački $x = a$.

Prostije rečeno, **postojanje jednakosti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ obezbedjuje neprekidnost funkcije f u tački $x = a$.**

Ako je funkcija $x \to f(x)$ neprekidna u svakoj tački skupa D, kažemo da je neprekidna na skupu D.

Nekoliko **teorema** koje pomažu u radu:

Ako su funkcije f i g neprekidne u tački $x = a$, onda su u toj tački neprekidne i sledeće funkcije :

$f + g,$
$f - g,$
$f \cdot g,$
$\frac{f}{g}$ (naravno za $g(a) \neq 0$)

Osnovne elementarne funkcije (imate fajl kod nas) su neprekidne na celom domenu.

Ako funkcija $x \to g(x)$ ima u tački $x = a$ graničnu vrednost *b* i ako je $y \to f(y)$ neprekidna u tački $y = b$, tada složena funkcija $x \to f(g(x))$ ima graničnu vrednost : $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to a} g(x)) = f(b)$

Vrste prekida i neprekidno produženje

Za tačku $x = a$ kažemo da je tačka prekida funkcije $x \to f(x)$:

- **Ako funkcija *f* nije definisana u tački**
- **Ako je funkcija *f* definisana u tački $x = a$, ali nije neprekidna u toj tački**

Kažemo da je funkcija $x \to f(x)$ prekidna u tački $x = a$.

Razlikujemo tri vrste prekida:

i) **Ako postoji** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = konačan\ broj$ **ali** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ **onda je to <u>prividan (otklonjiv) prekid</u>**

ii) **Ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije *f* u tački i NISU JEDNAKE , onda se kaže da funkcija ima <u>skok ili prekid prve vrste.</u>**
Recimo: $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b_1 \quad \text{i} \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = b_2 \quad \text{tada je "skok":} b_2 - b_1$

iii) **Ako bar jedna od graničnih vrednosti**
$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ ili $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ **NE POSTOJI**, onda je to <u>prekid druge vrste</u>.

Neki profesori još vole da kažu za otklonjiv prekid da je to prekid prve vrste kod koga je skok = 0, to jest

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b \quad \text{tada je "skok":} b_2 - b_1 = 0$$

Pa bi onda ustvari imali samo dve vrste prekida.(Vi radite onako kako predaje Vaš profesor….)

Primer 1.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Funkcija je definisana za $\forall x \in R / \{1\}$

Tražimo limese:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 + 1 = 2$$

Kako su ovi limesi jednaki, radi se o **prividnom prekidu!**

Primer 2.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

Tražimo limese:

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-1)=\boxed{-1}$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}1=\boxed{1}$$

Leva i desna granična vrednost postoje, ali su različiti brojevi , pa zaključujemo da se radi o **prekidu prve vrste!**

Primer 3.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

Funkcija je definisana za $\forall x \in R/\{1\}$

$$\lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1-\varepsilon-1}=\frac{1}{-\varepsilon}=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1+\varepsilon-1}=\frac{1}{+\varepsilon}=+\infty$$

Obe granične vrednosti "ne postoje" (nisu konačni brojevi) pa je **prekid druge vrste.**

Primer 4.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

Funkcija je definisana za $\forall x \in R/\{0\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0-\varepsilon}}=e^{-\infty}=0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0+\varepsilon}}=e^{+\infty}=+\infty$$

Jedna granična vrednost ne postoji, pa je **prekid druge vrste.**

Kako dodefinisati funkciju da bude neprekidna?

To je situacija kada funkcija ima prividan prekid u tački $x = a$.

Funkcija nije definisana u ovoj tački, ali je $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$.

Onda zapišemo:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \neq a \\ b, & \text{za } x = a \end{cases}$$

Da vas ne zbuni, neki profesori ne stavljaju neku novu funkciju g(x) već pišu:

$$f(x) = \begin{cases} \text{data funkcija}, & \text{za } x \neq a \\ b, & \text{za } x = a \end{cases}$$

Podsetimo se našeg primera:

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Funkcija je definisana za $\forall x \in R / \{1\}$

Tražimo limese:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 + 1 = 2$$

Kako su ovi limesi jednaki, radi se o ***prividnom prekidu!***

Neprekidno produženje ove funkcije bi bilo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{za } x \neq 1 \\ 2, & \text{za } x = 1 \end{cases}$$

Evo nekoliko zadataka vezanih za ovu temu:

1. Ispitati neprekidnost funkcije

a) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$ u tački x = 0

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1 \\ \dfrac{1}{3}, & x=-1 \end{cases}$ u tački x = - 1

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$ u tački x = 0

Rešenje:

a) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$ u tački x = 0

Tražimo dva limesa:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(1-x) = \boxed{1}$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(1+x) = \boxed{1}$$

Pogledajmo opet zadatu funkciju:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ \boxed{2, \quad x=0} \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$$

Ovde bi trebalo da piše 1 umesto 2, znači zaključujemo da je funkcija **prekidna** u tački x=0

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1 \\ \dfrac{1}{3}, & x=-1 \end{cases}$ u tački x = - 1

Opet se sve svede na poznavanje limesa!

Tražimo levi i desni limes u u tački x = - 1

$$\lim_{\substack{x\to -1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim_{\substack{x\to -1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\cancel{1+x}}{\cancel{(1+x)}(1-x+x^2)}=\lim_{\substack{x\to -1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{(1-x+x^2)}=\frac{1}{1-(-1)+(-1)^2}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim_{\substack{x\to -1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\cancel{1+x}}{\cancel{(1+x)}(1-x+x^2)}=\lim_{\substack{x\to -1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{(1-x+x^2)}=\frac{1}{1-(-1)+1}=\frac{1}{3}$$

Pogledamo zadatu funkciju:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1 \\ \boxed{\dfrac{1}{3}, \quad x=-1} \end{cases}$$

Zaključimo da je **neprekidna** u tački x = - 1

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$ u tački x = 0

$$\lim_{\substack{x\to 0-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\lim_{\substack{x\to 0-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{\substack{x\to 0-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Funkcija je **neprekidna** u tački x = 0

2. Odrediti parametre a i b tako da funkcija *f(x)* bude neprekidna na R.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0\\ b, & x=0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$

Rešenje:

a) Opet se sve svodi na znanje rešavanja limesa.....

$$\lim_{\substack{x\to 0\pm\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)+1}{\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)+1}=\lim_{\substack{x\to 0\pm\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1+2x^2-1}{x^2\cdot\left(\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)+1\right)}=$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\pm\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot\boxed{\underbrace{\left(\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)+1\right)}_{ovo\ \text{daje } 3}}}=\frac{2}{3}$$

Dakle : $\boxed{b=\dfrac{2}{3}}$

b)

$$\lim_{\substack{x\to 0\pm\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{0}{0}=(Lopital)=\lim_{\substack{x\to 0\pm\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{(e^{2x}-1)`}{x`}=\lim_{\substack{x\to 0\pm\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{e^{2x}\cdot 2}{1}=2$$

Odavde zaključujemo da je $\boxed{a=2}$