MATRICE (TEORIJA)

Za pravougaonu (kvadratnu) šemu brojeva a_{ij} ($i=1,2,...,m$ a $j= 1,2,...,n$):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ kažemo da je **matrica tipa** $m \times n$. Brojevi a_{ij} su elementi matrice.

Tip matrice je vrlo bitna stvar : kad kažemo da je matrica tipa $m \times n$, to znači da ona ima ***m* vrsta i *n* kolona**.

Primer:

Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ je tipa 2×3 jer ima dve vrste a tri kolone.

Matrica $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \\ 7 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ je tipa 4×2 jer ima 4 vrste i 2 kolone.

Matrice se najčešće obeležavaju ovim srednjim zagradama $[\ ]$, ali da vas ne zbuni, neki profesori ih obeležavaju i malim zagradama $(\ )$ a koriste se još i $\|\ \|$. Vi radite onako kako kaže vaš profesor...

Ako matrica ima **isti broj vrsta i kolona (**$n \times n$), za nju kažemo da je ***kvadratna matrica reda n***.

Matrica čiji su **svi elementi jednaki nuli** naziva se ***nula- matrica.*** $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, itd$

Matrica $-A$ definisana sa $-A \overset{def}{=} (-1)A$ je ***suprotna matrica*** za matricu *A*.

Kvadtarna matrica reda n za koju je $a_{ii} = 1$ (po glavnoj dijagonali su jedinice a sve ostalo nule) naziva se ***jedinična matrica reda n*** i označava se sa I_n

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ...itd$$

Neki profesori jediničnu matricu obeležavaju sa *E*. Vi radite onako kako kaže vaš profesor...

Ako su svi elementi kvadratne matrice reda n **ispod glavne dijagonale jednaki nuli**, takva se matrica naziva ***gornja trougaona matrica.***

Na primer : $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ je gornja trougaona matrica reda 3.

Ako su svi elementi kvadratne matrice reda n **iznad glavne dijagonale jednaki nuli**, takva se matrica naziva ***donja trougaona matrica.***

Na primer : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ je donja trougaona matrica reda 3.

Dve matrice A i B su **jednake** ako i samo ako su **istog tipa** i imaju **jednake odgovarajuće elemente**.

Sabiranje i oduzimanje matrica

Važno: Mogu se sabirati (oduzimati) samo matrice *istog tipa*!

Primer

Neka su date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Nadji matricu $A+B$ i A-B.

Najpre primetimo da su matrice A i B istog tipa 2×3, to jest obe imaju 2 vrste i 3 kolone. To nam govori i da će matrica koja je njihov zbir takodje biti tipa 2×3.

Sabiraju se tako što sabiramo " mesto s mestom"…krenemo od mesta na prvoj vrsti i koloni 2+ 3=5 itd…

$$A+B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boxed{3} & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{2+3} & 7+3 & -5+(-5) \\ 4+(-1) & 2+4 & 3+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{5} & 10 & -10 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Analogno radimo i oduzimanje:

$$A-B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \boxed{3} & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{2-3} & 7-3 & -5-(-5) \\ 4-(-1) & 2-4 & 3-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Množenje matrice skalarom (brojem)

Važno: Matrica se množi brojem tako što se *SVI* elementi matrice pomnože tim brojem!

Pazite, ovde često dođe do greške jer smo, ako se sećate ,rekli da se **determinanta** množi brojem tako što se samo jedna vrsta ili kolona pomnoži tim brojem, a kod **matrice** svaki element množimo tim brojem.

Primer

Neka je data matrica $A=\begin{bmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Odrediti matricu *3A*.

Naravno, kod množenja matrice skalarom tip matrice se ne menja.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$3A=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 7 & 3\cdot(-2)\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 6\\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 21 & -6\\ 6 & 3 & 18\\ 3 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Množenje matrica

Važno : Proizvod dve matrice je definisan *samo* ako je *broj kolona prve matrice jednak sa brojem vrsta druge matrice!*

Ako recimo uzmemo da je matrica *A* tipa $m\times n$ a matrica *B* tipa $n\times p$ onda će matrica , recimo *C* , koja se dobija njihovim množenjem biti tipa $m\times p$.

$A\cdot B=C$ a tip odredjujemo $(m\times \cancel{n})\cdot(\cancel{n}\times p)=m\times p$ (kao da se skrate unutrašnji)

Primer

Date su matrice :

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ .Odrediti njihov proizvod AB.

Najpre da vidimo koji tip će imati matrica koja se dobija njihovim proizvodom:

A je tipa 2×3, dok je B tipa 3×2 pa će matrica njihovog proizvoda biti tipa $(2\times\cancel{3})\cdot(\cancel{3}\times 2)=2\times 2$.

Dakle imaće dve vrste i dve kolone.

$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Kako sada računati? Imamo dakle 4 “mesta”.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{prva vrsta}\cdot\text{prva kolona} & \text{prva vrsta}\cdot\text{druga kolona}\\ \text{druga vrsta}\cdot\text{prva kolona} & \text{druga vrsta}\cdot\text{druga kolona}\end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{prva vrsta}\cdot\text{prva kolona}}$ dobijamo :

$$\begin{bmatrix}1 & \boxed{2} & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ \boxed{1} & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 1=2+2-1=3$$

$\boxed{\text{prva vrsta}\cdot\text{druga kolona}}$ dobijamo:

$$\begin{bmatrix}1 & \boxed{2} & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & \boxed{3}\\ 1 & -1\end{bmatrix}=1\cdot 0+2\cdot 3+(-1)\cdot(-1)=0+6+1=7$$

$\boxed{\text{druga vrsta}\cdot\text{prva kolona}}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & \boxed{2} & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ \boxed{1} & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=0\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 1=0+2+3=5$$

$\boxed{\text{druga vrsta}\cdot\text{druga kolona}}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & \boxed{2} & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & \boxed{3}\\ 1 & -1\end{bmatrix}=0\cdot 0+2\cdot 3+3\cdot(-1)=0+6-3=3$$

Sad ovo ubacimo gore:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Naravno, vi ne morate da radite ovoliko postupno, kad se izvežbate, sve će ići mnogo brže...

Za proizvod matrica važe zakoni:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ i $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
3) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A)B = A(\alpha \cdot B)$ α je skalar (broj)
4) $I \cdot A = A \cdot I$ gde je I jedinična matrica

Važno: Za matrice u opštem slučaju ne važi komutativnost množenja $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

Ako je A matrica tipa $m \times n$, onda se njena **transponovana matrica** A^T dobija kada u matrici A **kolone i vrste zamene mesta**. Tip matrice A^T je onda naravno $n \times m$.

Primer

Ako je recimo $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, onda je $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Ako je recimo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Matrica A za koju je $A = A^T$ naziva se simetrična matrica.(naravno, matrica A mora biti kvadratna)

Primer

Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, kad zamenimo mesta kolone u vrste, dobijamo $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Dakle, ova matrica je simetrična!

Za operaciju **transponovanja** važe sledeće osobine:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$ α je skalar
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$ ako su matrice A i B istog tipa
4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Dalje se moramo upoznati sa **<u>determinantama</u>**.

Ova tema je obrađena u posebnom fajlu determinante, a mi ćemo vas podsetiti na neke najvažnije stvari.

Determinantu kvadratne matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ obeležavamo sa **det (*A*) ili** $|A|$ a zapisujemo :

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Znači da determinante , za razliku od matrica , pišemo u zagradama $|\;|$. **Determinanta je broj a matrica je šema!**

Nećemo vas daviti sa teorijom, već ćemo na par primera objasniti kako se računaju determinante:

DRUGOG REDA

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc Računaju se tako što pomnožimo elemente na takozvanoj glavnoj

dijagonali, pa od toga oduzmemo pomnožene elemente na sporednoj dijagonali.

<u>Primer:</u>

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \circ 7 - 4 \circ 5 = 21-20 = 1$ $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = (-1) \circ 12 - (-5) \circ 3 = -12+15 = 3$

TREĆEG REDA

Determinante trećeg reda možemo razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni. Najpre svakom elementu dodelimo predznak + ili -, i to radimo neizmenično:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$ Samo da vas podsetimo: vrste su $\longrightarrow$, a kolone $\downarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ = Ako recimo hoćemo da razvijemo po prvoj vrsti=

$$= + a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$, ili ako recimo razvijamo po drugoj koloni:

$$= - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Najbolje je ,naravno, da razvijamo po onoj koloni ili vrsti gde ima najviše nula !

<u>Primer:</u> Izračunaj vrednost determinante $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ = Najpre iznad svakog broja napišite predznake: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$, ili ako vam je

lakše samo iznad brojeva u vrsti ili koloni po kojoj ste rešili da razvijete determinantu. Mi smo rešili po drugoj vrsti jer ima jedna nula (moglo je i po trećoj koloni, sve jedno).

Dakle:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{7} & \overset{-}{0} \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(3\circ 2 - 1\circ 3)+7(5\circ 2-2\circ 1)= -3 +56=53$$

Drugi način za računanje determinanti trećeg reda, medju učenicima vrlo popularan, je **SARUSOVO pravilo**.

Pored date determinante dopišu se prve dve kolone , pa se elementi množe dajući im znake kao na slici:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$$

\- \- \-

\+ \+ \+

Primer: Izračunaj vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 5 \circ 7 \circ 2 + 3 \circ 0 \circ 2 + 1 \circ 1 \circ 3 - 3 \circ 1 \circ 2 - 5 \circ 0 \circ 3 - 1 \circ 7 \circ 2 =$$

$$= 70 + 0 + 3 - 6 - 0 - 14 = 53$$

Dakle, na oba načina smo dobili isti rezultat,pa vi odaberite sami šta vam je lakše.

ČETVRTOG REDA

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$ = Možemo je razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni! I ovde slično kao za

determinante trećeg reda prvo napišemo predznake svima ili samo onoj vrsti ili koloni po

kojoj ćemo da razvijamo determinantu.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$ Mi ćemo , recimo, da razvijemo determinantu po prvoj koloni:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_1} & b_1 & c_1 & d_1 \\ \overset{-}{a_2} & b_2 & c_2 & d_2 \\ \overset{+}{a_3} & b_3 & c_3 & d_3 \\ \overset{-}{a_4} & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Naravno, sad bi trebalo da razvijemo svaku od ove četiri determinante trećeg reda....
Složićete se da ovo nije baš lako.
Naučimo zato osobine determinanata koje će nam pomoći u rešavanju zadataka.

OSOBINE DETERMINANATA

1. **Determinanta menja znak ako dve vrste ili kolone izmenjaju svoja mesta.**

2. **Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste i kolone promene svoje uloge.**

3. **Determinanta se množi brojem, kad se tim brojem pomnože svi elementi ma koje (ali samo jedne) vrste ili kolone.**
   Obrnuto, zajednički faktor elemenata jedne vrste ili kolone može se izvući ispred determinante

   Na primer:

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1k & b_1k & c_1k \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1k & b_1 & c_1 \\ a_2k & b_2 & c_2 \\ a_3k & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ itd. } \quad \text{ili}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. **Ako je u determinanti svaki element neke k-te vrste (kolone) zbir dva ili više sabiraka, onda je ona jednaka zbiru dve ili više determinanata, koje imaju iste elemente kao i data determinanta, osim elemenata k-te vrste (kolone).**

   Na primer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+m_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+m_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+m_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. **Ako su svi elementi jedne vrste(kolone) jednaki nuli, vrednost determinante je nula.**

Primeri:

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 & 55 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & 68 & 34 & -80 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

6. **Ako elementi u dve vrste ili kolone imaju iste vrednosti, vrednost determinante je opet nula.**

Primer:

$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 6 \\ 12 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ jer su elementi prve i treće vrste jednaki}$$

7. **Ako su dve vrste (kolone) proporcionalne među sobom , vrednost determinante je opet nula**.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -9 & 5 & 56 \\ 10 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \text{ jer su prva i treća vrsta proporcionalne, tj. prva puta 3 daje treću}$$
vrstu.

8. **Vrednost neke determinante ostaje nepromenjena ako se elementima jedne vrste(kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste(kolone) pomnoženi istim brojem!**

Ova osma osobina će nam pomoći da lakše rešimo determinante četvrtog i višeg reda.

9. $\det A = \det A^T$

   Ako transponujemo matricu , vrednost njene determinante se ne menja.

Minor (u oznaci M_{ij}) elementa a_{ij} determinante reda n jeste determinanta matrice reda n-1 koja se dobija izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone iz date matrice.

Kofaktor (u oznaci A_{ij}) elementa a_{ij} determinante reda n definišemo sa $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$

Primer

Ako posmatramo matricu $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, njeni minori i kofaktori će biti:

Minori:

$$\boxed{M_{11}} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{12}} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{13}} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_{21}} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{22}} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{23}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_{31}} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{32}} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{33}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Kako smo dobili recimo minor M_{11} ?

Oznaka 11 nam govori da poklapamo prvu vrstu i prvu kolonu: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, ono što ostane stavimo u malu determinantu.

Minor M_{12} dobijamo kad poklopimo prvu vrstu i drugu kolonu (12): $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, ostaje $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, itd.

Kofaktori:

$$\boxed{A_{11}} = (-1)^{1+1} M_{11} = +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{12}} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{13}} = (-1)^{1+3} M_{13} = +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{21}} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{22}} = (-1)^{2+2} M_{22} = +\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{23}} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{31}} = (-1)^{3+1} M_{31} = +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{32}} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{33}} = (-1)^{3+3} M_{33} = +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Šta možemo primetiti kod kofaktora što se tiče znakova?

Pa, znaci idu naizmenično, kao kad smo razvijali determinante: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Ako vaš profesor dozvoljava, možete izbeći da pišete ono $(-1)^{i+j}$, već odma uzmete znakove neizmenično.

Jedan od čestih zadataka na fakultetima je traženje inverzne matrice. Ona se upotrebljava za rešavanje sistema jednačina , matričnih jednačina…

Najpre ćemo reći nešto o **adjungovanoj** matrici.

Naka je data matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ili skraćeno zapisana $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$.

Matricu $\|A_{ij}\|^T$, gde su A_{ij} kofaktori elemenata a_{ij} matrice A, nazivamo <u>**adjungovana**</u> (pridružena) matrica za matricu A i označavamo je sa :

$$\boxed{adjA = \|A_{ij}\|^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}}$$

<u>Primer:</u>

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti njenu adjungovanu matricu $adjA$.

Najpre tražimo kofaktore…Onda njih poredjamo u matricu…

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0}\\ \boxed{0} & 3 & 2\\ \boxed{1} & 0 & 2\end{bmatrix}\rightarrow A_{11}=+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6$$

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0}\\ 0 & \boxed{3} & 2\\ 1 & \boxed{0} & 2\end{bmatrix}\rightarrow A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(-2)=2$$

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0}\\ 0 & 3 & \boxed{2}\\ 1 & 0 & \boxed{2}\end{bmatrix}\rightarrow A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3$$

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1} & 5 & 0\\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2}\\ \boxed{1} & 0 & 2\end{bmatrix}\rightarrow A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-10$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & \boxed{5} & 0\\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2}\\ 1 & \boxed{0} & 2\end{bmatrix}\rightarrow A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & \boxed{0}\\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2}\\ 1 & 0 & \boxed{2}\end{bmatrix}\rightarrow A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(-5)=5$$

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1} & 5 & 0\\ \boxed{0} & 3 & 2\\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2}\end{bmatrix}\rightarrow A_{31}=+\begin{vmatrix}5 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=10$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & \boxed{5} & 0\\ 0 & \boxed{3} & 2\\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2}\end{bmatrix}\rightarrow A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & \boxed{0}\\ 0 & 3 & \boxed{2}\\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2}\end{bmatrix}\rightarrow A_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$$

Sad ove vrednosti menjamo u : $adjA=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$, pa je $adjA=\begin{bmatrix}6 & -10 & 10\\ 2 & 2 & -2\\ -3 & 5 & 3\end{bmatrix}$

II način za traženje adjungovane matrice

Kad malo steknete iskustvo , ne morate sve da radite postupno, već možete odmah da tražite adjungovanu matricu.

Uzmemo datu matricu: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ i transponujemo je: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Tu stavimo predznake neizmenično: $A^T = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{5} & \overset{+}{3} & \overset{-}{0} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{2} \end{bmatrix}$

Poklapamo mesta i sve stavljamo u veliku matricu

$$adjA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Na taj način odmah imamo $adjA = \begin{bmatrix} 6 & -10 & 10 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Sad možemo definisati i ***inverznu matricu***.

Naka je *A* kvadratna matrica reda *n* . Ako postoji matrica A^{-1} **reda *n* takva da je** $\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$ **, gde je**

I_n **jedinična matrica reda *n* , tada kažemo da je** A^{-1} **<u>inverzna matrica</u> matrice *A*.**

Formula po kojoj tražimo inverznu matricu je : $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot adjA}$

Naravno , treba reći da inverzna matrica postoji ako i samo ako je $\det A\neq 0$ **.**

Inverzna matrica je, ako postoji, jedinstvena!

<u>Primer</u>

Odrediti inverznu matricu matrice $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{bmatrix}$

Radimo po formuli: $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot adjB$

Najpre tražimo ***det B*** , jer ta vrednost mora biti različita od nule da bi postojala inverzna matrica...

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}\ \text{koristimo Sarusov postupak...}$$

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & -3\\ 4 & -5\\ 5 & -7\end{matrix}=2\cdot(-5)\cdot 3+(-3)\cdot 2\cdot 5+1\cdot 4\cdot(-7)-(-3)\cdot 4\cdot 3-2\cdot 2\cdot(-7)-1\cdot(-5)\cdot 5=$$

$$=-30-30-28+36+28+25=-88+89=1$$

$\boxed{\det B=1}$

Dalje tražimo **adj *B*.**

$$adjB = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ \boxed{4} & -5 & 2 \\ \boxed{5} & -7 & 3 \end{bmatrix} \to B_{11} = +\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -15-(-14) = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & \boxed{-5} & 2 \\ 5 & \boxed{-7} & 3 \end{bmatrix} \to B_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -[12-10] = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -28-(-25) = -3$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ \boxed{5} & -7 & 3 \end{bmatrix} \to B_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -[-9-(-7)] = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{-3} & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ 5 & \boxed{-7} & 3 \end{bmatrix} \to B_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6-5 = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -[-14-(-15)] = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 \\ \boxed{4} & -5 & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -6-(-5) = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{-3} & 1 \\ 4 & \boxed{-5} & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10-(-12) = 2$$

Poredjamo kofaktore u matricu adj *B*.

$$adjB=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$, sada se vraćamo u formulu $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot adjB$, pa je :

$$B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{bmatrix}\rightarrow\boxed{B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{bmatrix}}$$

Ako za matricu *A* postoji inverzna matrica, kažemo da je matrica *A* *regularna matrica*.

U protivnom, za matricu A kažemo da je **singularna** (neregularna).

Evo nekoliko pravila koja važe za regularne matrice:

1) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$
2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
3) $(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdot\ldots\cdot A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$

Ako za kvadratnu matricu *A* važi da je $\boxed{A^T=A^{-1}}$, onda nju nazivamo *ortogonalna* matrica.

Rang matrice

Najpre da kažemo koje su **elementarne transformacije** matrica:

i) zamena mesta dve vrste (*kolone*)

ii) množenje elemenata jedne vrste (*kolone*) nekim brojem koji je različit od nule

iii) dodavanje elementima jedne vrste (*kolone*) elemenata(odgovarajućih) neke druge vrste(*kolone*) koji su prethodno pomnoženi proizvoljnim brojem.

Matrica ***A*** je **ekvivalentna** sa matricom ***B*** (oznaka $A\sim B$) ako se od matrice ***A*** može preći na matricu ***B*** primenom konačno mnogo ekvivalentnih transformacija.

Posmatrajmo neku matricu $A \in M_{m\times n}$ (matricu A iz skupa matrica M tipa $m\times n$)

Ako u matrici *A* izostavimo neke vrste ili neke kolone (a može istovremeno i vrste i kolone), tako dobijenu matricu nazivamo PODMATRICA matrice *A*.

Determinantu kvadratne podmatrice reda *k* matrice $A \in M_{m\times n}$ **nazivamo MINOR reda *k* matrice *A*.**

Neka je $M_{m\times n}$ skup svih matrica tipa $m\times n$ i $N_0 = \{0,1,2,3......\}$ skup prirodnih brojeva (sa 0).

Rang matrice u oznaci rang (ili *r*) je preslikavanje:

$$rang : M_{m\times n} \to N_0$$

određeno sa

a) $rang(A) = 0$ ako je A nula matrica

b) $rang(A) = p$, ako postoji minor **reda *p*** matrice A koji je **različit od nule** , a **SVI** minori **većeg reda od *p***, ukoliko oni postoje**, su jednaki nuli**.

Primer 1.

Odrediti rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

Retko kada možemo odmah reći koji je rang date matrice.

Prvi posao nam je da koristeći navedene **elementarne transformacije** matrica napravimo ekvivalentnu matricu koja će **ispod glavne dijagonale imati sve nule**! (takozvana **TRAPEZNA** matrica)

Kod nas su na glavnoj dijagonali 2 i -2, pa ispod njih pravimo nule.

Za našu matricu nule moraju biti na UOKVIRENIM mestima: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \boxed{1} & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{-6} \end{bmatrix}$

I **redosled** “pravljenja” nula je vrlo bitan!

Nule pravimo najpre na mestu $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ \boxed{3} & -6 \end{bmatrix}$, zatim na mestu $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \boxed{1} & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ i na kraju $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & \boxed{-6} \end{bmatrix}$.

Neki profesori traže da se svaki korak transformacija objašnjava, neki dozvoljavaju da se odmah prave nule na svim mestima u prvoj koloni, pa u drugom koraku na svim mestima u drugoj koloni , itd.

Naš savet je kao i uvek da poslušate vašeg profesora kako on zahteva a mi ćemo pokušati da vam objasnimo " korak po korak".

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$. Najpre ćemo zameniti mesta prvoj i drugoj vrsti , da nam jedinica bude u prvoj vrsti zbog lakšeg računanja (ovo nije neophodno al olakšava posao...)

$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ Sad pravimo nulu na mestu gde je 3: $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ \boxed{3} & -6 \end{bmatrix}$

Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -3 i sabrati sa trećom vrstom i to upisati u treću vrstu.

Na mestu gde je bilo 3 biće: $1 \cdot (-3) + 3 = \boxed{0}$

Na mestu gde je bilo -6 biće $-2 \cdot (-3) + (-6) = \boxed{0}$

Pa je $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dalje nam treba nula gde je dvojka: $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \boxed{2} & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -2 , sabrati sa drugom vrstom i upisati umesto druge vrste:

Na mestu gde je bilo 2 na taj način smo dobili nulu, a na mestu gde je bilo -4 biće: $-2 \cdot (-2) + (-4) = \boxed{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sad razmišljamo: Pošto je matrica tipa 3×2, njen maksimalni rang može biti 2, jer postoje samo determinante drugog reda. Ali, koju god da uzmemo determinantu drugog reda ona će imati u jednoj vrsti obe nule a znamo da je vrednost takve determinante nula. Rang ove matrice je znači 1, u oznaci $\boxed{r(A)=1}$.

Primer 2.

Odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Rešenje:

Ova matrica je tipa 3×3, tako da postoji determinanta reda 3 , a to znači da i maksimalni rang može biti 3.

Da se ne zalićemo, prvo mi da napravimo nule ispod glavne dijagonale, na uokvirenim mestima: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{0} & 5 \end{bmatrix}$

Zamenićemo drugu i prvu kolonu, jer već imamo nulu...

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ sad pravimo nulu na mestu gde je 1 (uokvireno)

Saberemo prvu i drugu vrstu i to ide u drugu vrstu...

Na mestu gde je 1(uokvireno) biće 0.

Na mestu gde je 2 biće: 2+1=3

Na mestu gde je 1 biće : 4+1 = 5

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 5 \end{bmatrix}$ dalje pravimo nulu na uokvirenom mestu(gde je 3):

Od treće vrste oduzmemo drugu i to ide u treću vrstu.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sad je jasno da rang **ne može** biti **tri** jer je vrednost determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Ako recimo uzmemo $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, njena vrednost je $-3 \neq 0$, pa je rang ove matrice 2: $\boxed{r(A) = 2}$

Evo još nekoliko stvari koje bi trebalo da znamo o matricama:

1) Ekvivalentne matrice imaju isti rang!

2) Ako posmatramo tri matrice *A,B* i *C* iz skupa svih matrica $M_{m\times n}$, za njih važi:

$$A \sim A \rightarrow refleksivnost$$
$$A \sim B \Rightarrow B \sim A \rightarrow simetricnost$$
$$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C \rightarrow tranzitivnost$$

Ovo nam govori da je $\sim$ **relacija ekvivalencije** na skupu svih matrica tipa $m \times n$.

3) Neka je A matrica ranga p većeg ili jednakog jedinici $p \geq 1$. Tada postoje p nezavisnih vrsta (kolona) matrice A takvih da su ostale vrste (kolone) linearne kombinacije tih p vrsta (kolona).

4) Rang matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih vrsta (kolona) te matrice.