1. Operacije i zakoni operacija

Neka je S neprazan skup .

Operacija dužine *n* skupa S jeste svako preslikavanje $f : S^n \to S$ $(S^n = \underbrace{S \times S \times S .... \times S}_{n-puta})$

Ako je n = 1 , onda operaciju nazivamo **unarna.** **(** $f : S \to S$)

Ako je n = 2 , onda operaciju nazivamo **binarna.** **(** $f : S^2 \to S$)

Primer 1.

Sledeća tablica definiše jednu unarnu operaciju na skupu {a,b,c,d,e}

a	b	c	d	e
e	a	a	c	d

Primer 2.

Operacija komplementiranja (pogledaj fajl o skupovima) je unarna operacija u skupu P(X).

Primer 3.

Funkcija $n \to n^2$ je jedna unarna operacija u skupu N (prirodni brojevi)

Primer 4.

Negacija je jedna unarna operacija, da se podsetimo:

Negacija iskaza p je iskaz $\neg$p kojem odgovara tablica:

p	$\neg$p
T	$\perp$
$\perp$	T

Očigledno je iskaz $\neg$p tačan samo u slučaju kada je iskaz p netačan.

Nas posebno zanimaju binarne operacije (operacije dužine 2) jer su najznačajnije, bar za dosadašnje poznavanje matematike.

Evo nekoliko primera binarnih operacija:

Primer 1.

Funkcija $(x, y) \to x + y$ sa N^2 u N je poznata operacija sabiranja prirodnih brojeva.

Primer 2.

Neka je $S = \{\mathrm{T}, \perp\}$ (tačno i netačno).

Dobro poznate binarne operacije iz logike su:

Konjukcija iskaza p i q je iskaz $p \wedge q$ kojem odgovara sledeća istinitosna tablica:

p	q	$p \wedge q$
T	**T**	**T**
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Konjukcija je tačna samo ako su p i q tačni iskazi.

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz $p \vee q$ kojem odgovara sledeća tablica:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Disjunkcija je netačna samo ako su oba iskaza , i p i q, netačni.

Kako bi ovo bilo zadato tablicom sada u ovoj oblasti? Pogledajmo:

$\wedge$	T	$\perp$
T	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

konjukcija

$\vee$	T	$\perp$
T	T	T
$\perp$	T	$\perp$

disjunkcija

Naravno, implikacija i ekvivalencija su takodje binarne operacije….

Primer 3.

Sledeća tablica (Kelijeva tablica) , definiše jednu binarnu operaciju $*$ na skupu { a,b,c,d }

$*$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

Ovde samo morate da vodite računa da prvo gledamo vrstu pa kolonu....

Recimo:

$*$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

a $*$ b = c

$*$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

b $*$ a = b

$*$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

c $*$ d = b

<u>Sada da se upoznamo (podsetimo) nekih zakona operacija:</u>

1. Za binarnu operaciju $*$ u skupu X važi *asocijativni zakon* ako :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad \left(x*(y*z)=(x*y)*z\right)$$

Na primer, za operaciju $+$ (plus) sabiranja u skupu prirodnih brojeva važi asocijativni zakon jer je recimo

$\boxed{2+(5+3)=(2+5)+3}=10$ dok za operaciju (-) oduzimanje to ne važi

$$2-(5-3) \neq (2-5)-3 \text{ jer je}$$
$$2-(5-3)=2-2=0$$
$$(2-5)-3=-3-3=-6$$

Za operaciju množenja važi asocijativni zakon,naravno u odgovarajućem skupu brojeva,

dok za operaciju deljenja i stepenovanja ne važi jer je, na primer :

$$\left.\begin{array}{l}(100:10):2=10:2=5 \\ 100:(10:2)=100:5=20\end{array}\right\} \rightarrow 100:(10:2) \neq (100:10):2$$

$\left(2^3\right)^4=8^4=4096$ a $2^{\left(3^4\right)}=2^{81}$ a ovo je broj mnogo veći od 4096. Dakle $\left(2^3\right)^4 \neq 2^{\left(3^4\right)}$

2. Za binarnu operaciju $*$ u skupu X važi *komutativni zakon* ako :

$$(\forall x, y \in X) \ \ (x * y = y * x)$$

Na primer, sabiranje i množenje u skupu prirodnih brojeva je komutativna operacija $2+3=3+2$ ili $2\cdot 3=3\cdot 2$

Ali oduzimanje i deljenje nisu komutativne na odgovarajućem skupu brojeva:

$2-7\neq 7-2$ i $10:5\neq 5:10$

Takodje i operacija stepenovanja nije komutativna, jer na primer $2^3\neq 3^2$

3. Neka su u skupu X zadate dve binarne operacije $*$ i $\odot$. Kaže se da za operaciju $\odot$ važi

***levi distributivni zakon* u odnosu na operaciju $*$, odnosno *desni distributivni zakon* ako:**

$(\forall x, y, z \in X) \ \ \big(x\odot(y*z)=(x\odot y)*(x\odot z)\big)$ **levi distributivni zakon**

$(\forall x, y, z \in X) \ \ \big((x*y)\odot z=(x\odot z)*(y\odot z)\big)$ **desni distributivni zakon**

Ako važi i levi i desni distributivni zakon , onda se kaže da za operaciju $\odot$ važi distributivni zakon u odnosu na operaciju $*$.

Recimo, operacija množenja je distributivna u odnosu na operaciju sabiranja u skupu celih brojeva, ali operacija sabiranja nije distributivna u odnosu na množenje, jer je na primer:

$$\left.\begin{array}{l} 5+(2\cdot 3)=5+6=11 \\ (5+2)\cdot(5+3)=7\cdot 8=56 \end{array}\right\} \to \boxed{5+(2\cdot 3)\neq(5+2)\cdot(5+3)}$$

4. Element $a\in X$ je

***regularan s leva* u odnosu na operaciju $*$ ako** $(\forall x, y \in X)\ (a*x=a*y \to x=y)$

***regularan s desna* u odnosu na operaciju $*$ ako** $(\forall x, y \in X)\ (x*a=y*a \to x=y)$

Ako je $a\in X$ regularan i s leva i s desna onda je *regularan*.

Regularnost daje mogućnost skraćivanja (kancelacije)

Ovde moramo voditi računa o kom skupu brojeva se radi….Ako recimo posmatramo skup nenegativnih celih brojeva $\{0,1,2,3,4,5,6,7,.......\}$ onda element 0 nije regularan u odnosu na operaciju množenja jer , na primer:

$0\cdot 5=0\cdot 7$ ali je $5\neq 7$

5. Ako postoji element $e \in X$ takav da $(\forall x \in X)(e * x = x * e = x)$ onda se taj element zove *neutral.* (neutralni element)

Na primer , za operaciju sabiranja neutral je nula : $7+0=0+7=7$,

Za operaciju množenja neutral je jedinica : $7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7$

Ako postoji neutralni element on je jedinstven!

6. **Neka u odnosu na operaciju $*$ u skupu *X* postoji neutralni element *e* . Element $x` \in X$ je *inverzni***

element **elementa *x* $\in X$ ako je** $\boxed{x * x` = x` * x = e}$

Da vas ne zbuni to što neki profesori ovaj inverzni element još zovu i simetrični element.

Evo objašnjenja:

Za operaciju množenja (multiplikativna operacija) element x` je baš **inverzni** element i oblika je :

$x` = \frac{1}{x}$ jer je $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$, naravno kad iz datog skupa izbacimo 0.

Za operaciju sabiranja (aditivna operacija) element x` je **suprotan** element i oblika je :

$x` = -x$ jer je $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Kao i uvek, naš savet je da radite, odnosno zovete ovaj element kako zahteva vaš profesor.....

Ako postoji inverzni (simetrični) element on je jedinstven!

Da rezimiramo:

Mi ćemo proučavati binarne operacije , a zakone koje ispitujemo su :

$(\forall x, y, z \in X)$ $\left(x * (y * z) = (x * y) * z\right)$ **asocijativni zakon**

$(\forall x, y \in X)$ $(x * y = y * x)$ **komutativni zakon**

$(\forall x, y, z \in X)$ $\left(x \odot (y * z) = (x \odot y) * (x \odot z)\right)$ **i** $\left((x * y) \odot z = (x \odot z) * (y \odot z)\right)$ **distributivni zakon**

$(\forall x \in X)(e * x = x * e = x)$ **postoji neutralni element i**

$x * x` = x` * x = e$ **postoji inverzni element**