Grupe-zadaci

1. **Na skupu Q (racionalnih brojeva) definisana je operacija * sa x * y = x+y+xy. Ispitati svojstva strukture (Q, *).**

Rešenje:

Da se podsetimo redosleda ispitivanja:

Ako je dat skup S i operacija * , za strukturu $(S,*)$ ispitujemo

i) ako $x, y \in S$ tada $x * y \in S$ **(zatvorenost operacije)**

ii) $(\forall x, y, z \in S)$ $\left(x*(y*z)=(x*y)*z\right)$ **(asocijativnost)**

iii) $(\forall x \in S)(e*x = x*e = x)$ **(postoji neutral)**

iv) $(\forall x \in S)$ $(\exists x` \in S)$ $(x*x`=x`*x=e)$ **(postoji inverzni element)**

v) $(\forall x, y \in S)$ $(x*y=y*x)$ **(komutativnost)**

i) Operacija je zatvorena po načinu na koji je definisana

ii) Proveravamo asocijativnost:

x*(y*z) = x*(y+z+yz) = x+y+z+yz+x(y+z+yz) = **x+y+z+yz+xy+xz+xyz**

(x*y)*z = (x+y+xy)*z=x+y+xy+z+(x+y+xy)z=x+y+xy+z+xz+yz+xyz = **x+y+z+yz+xy+xz+xyz**

Dobili smo isto rešenje, pa zaključujemo da asocijativnost važi!

iii) Tražimo neutral

e* x = x	odnosno	x*e = x
e+x+ex=x		x+e+ex=x
e+ex=0		e+ex=0
e= 0		**e=0**

iv) Tražimo inverzni element

$$x*x`=e$$

$$x*x`=0$$

$$x+x`+xx`=0$$

$$x`+xx`=-x$$

$$x`(1+x)=-x$$

$$x`=\frac{-x}{1+x}$$

Ovde imamo ograničenje da je $x \neq -1$ a kako to nije naglašeno u zadatku, zaključujemo da **ne** postoji inverz!

V) **Ispitujemo komutativnost**

x*y = x+y+xy

y*x = y+x+yx = x+y+xy

Komutativnost važi!

Zaključak: **Data struktura je komutativan monoid!**

2. Na skupu $R \setminus \{-2\}$ definisana je operacija * sa **x * y = xy+2x+2y+2**
   Ispitati strukturu ($R \setminus \{-2\}$,*)

   Rešenje:

i) Operacija je zatvorena po načinu na koji je definisana

ii) Asocijativnost

x*(y*z)=x*(yz+2y+2z+2)= x(yz+2y+2z+2)+2x+2(yz+2y+2z+2)+2

= xyz+2xy+2xz+2x+2x+2yz+4x+4z+4+2

= **xyz+4x+4y+4z+2xy+2xz+2yz+6**

(x*y)*z=(xy+2x+2y+2)*z=(xy+2x+2y+2)z+2(xy+2x+2y+2)+2z+2

=xyz+2xz+2yz+2z+2xy+4x+4y+4+2z+2

= **xyz+4x+4y+4z+2xy+2xz+2yz+6**

Asocijativnost važi!

iii) Tražimo neutral

e*x = x

ex+2e+2x+2=x

ex+2e = -x -2

e(x+2)= - (x+2) kako u zadatku ima da je $R \setminus \{-2\}$ skup na kome radimo

e = -1

Da proverimo i sa druge strane:

x*e=x

xe+2x+2e+2=x

xe+2e=- x-2

e(x+2)= -(x+2)

e = - 1

Našli smo neutralni element **e = - 1**

iv) Tražimo inverzni element

$$x * x` = e$$
$$x * x` = -1$$
$$xx` + 2x + 2x` + 2 = -1$$
$$xx` + 2x` = -3 - 2x$$
$$x`(2 + x) = -3 - 2x$$
$$x` = \frac{-3 - 2x}{2 + x}$$

$$x` * x = e$$
$$x` * x = -1$$
$$x`x + 2x` + 2x + 2 = -1$$
$$x`x + 2x` = -3 - 2x$$
$$x`(2 + x) = -3 - 2x$$
$$x` = \frac{-3 - 2x}{2 + x}$$

Postoji inverzni element !

V) **Ispitujemo komutativnost**

x*y = **xy + 2x + 2y +2**

y*x = yx + 2y +2x +2 = **xy + 2x + 2y +2**

Važi i komutativnost!

Znači da je u pitanju komutativna (Abelova) grupa!

3. Ispitati algebarsku strukturu $(A,\bullet)$ gde je $A=\left\{\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix} \middle| a\in R\right\}$ i $\bullet$ je množenje matrica.

Rešenje:

i) Zatvorenost operacije

Ako uzmemo recimo

$\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}\in A$ onda je:

$$\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+b\\0 & 1\end{bmatrix}\in A$$

Operacija je zatvorena

ii) Asocijativnost

$\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & c\\0 & 1\end{bmatrix}\in A$ onda je:

$$\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}\bullet\left(\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & c\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & b+c\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+b+c\\0 & 1\end{bmatrix}$$

S druge strane imamo:

$$\left(\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\bullet\begin{bmatrix}1 & c\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+b\\0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & c\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+b+c\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Važi i asocijativnost

iii) Neutral

Znamo da za matrice važi

$$A\bullet I=I\bullet A=A$$

Gde je I jedinična matrica, u ovom slučaju $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

iv) Inverzni element

Tražimo inverznu matricu , znamo da se obeležava sa A^{-1} za koju važi:

$$A\bullet A^{-1}=A^{-1}\bullet A=I$$

Da se podsetimo kako se traži inverzna matrica:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot a = 1$$

Sad nadjemo transponovanu matricu:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

I još adjungovana:

$$A^T = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} \\ \overset{-}{a} & \overset{+}{1} \end{bmatrix} \to adjA = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Za sad smo dokazali da je ova struktura grupa.

Znamo da uopšteno za množenje matrica ne važi komutativni zakon, pa moramo proveriti za naš tip matrice…

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in A \text{ onda je:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S druge strane imamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Važi i komutativnost, pa je struktura Abelova grupa!