Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Da se podsetimo:

Kompleksni broj je oblika $z = x + yi$

x je realni deo, ***y*** je imaginarni deo kompleksnog broja, ***i***- je imaginarna jedinica $i = \sqrt{-1}$, $(i^2 = -1)$

Dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ su **jednaka** ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$

Za $z = x + yi$ **broj** $\bar{z} = x - yi$ **je konjugovano kompleksan broj.**

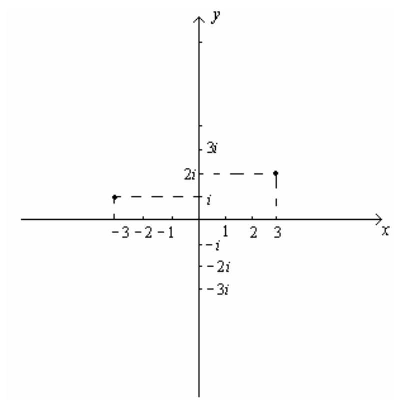
Modul kompleksnog broja $z = x + yi$ je : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Kompleksni brojevi se predstavljaju u kompleksnoj ravni, gde je x-osa realna osa, a y-osa imaginarna osa.

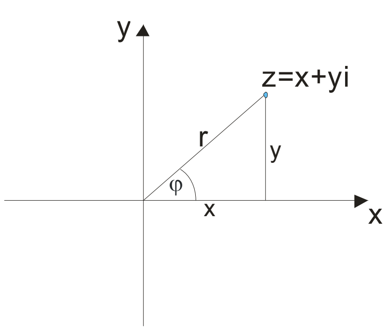
<ins>Primer</ins>

Tački A odgovara kompleksni broj 3+2i.

Tačka B odgovara kompleksnom broju -3+i.



Ako je dat kompleksan broj $z = x + yi$ onda se njegov realni deo može zapisati kao: $x = r\cos\varphi$ a imaginarni $y = r\sin\varphi$. To možemo videti I sa slike:



$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\varphi$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{y}{x}$$

Dakle, kompleksni broj je:

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi i, \quad tj.$$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Ovaj oblik se zove **trigonometrijski.** Ovde je **r- modul**, odnosno: $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$, ugao φ se zove **argument kompleksnog broja**. Kako su sinx i cosx periodične funkcije kompleksni broj se može zapisati I kao :

$$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$$
$$k \in Z$$

Primer: Pretvoriti sledeće kompleksne brojeve u trigonometrijski oblik:

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

v) $z = -1$

g) $z = i$

Rešenje: **a)** $z = 1 + i$

Šta radimo?

Najpre odredimo x i y, nadjemo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zatim $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ i to zamenimo u trigonometriski oblik: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Dakle: $x = 1, y = 1 \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

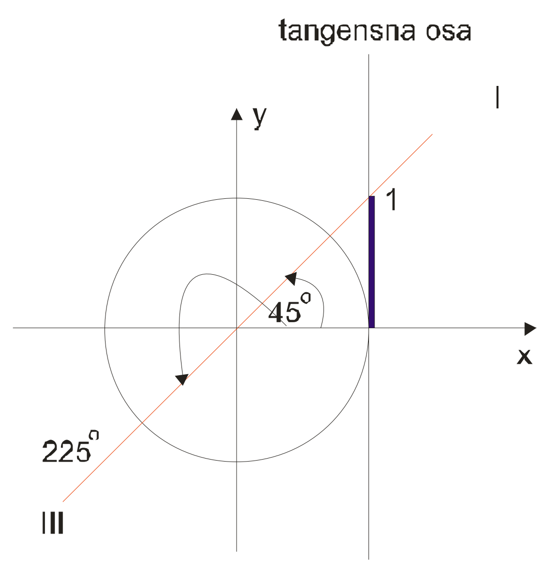
$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$tg\varphi = \frac{1}{1}$$

$$tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^o = \frac{\pi}{4}$$

Na slici primećujemo da vrednost 1

imaju 2 ugla : od 45^0 **i** 225^0



Zašto smo mi uzeli ugao od 45^0?

Zadati kompleksni broj je $z=1+i$ a ako to poredimo sa $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Vidimo da i sinus i kosinus moraju biti pozitivni!

Takva situacija je u I kvadrantu dok su u III kvadrantu i sinus i kosinus negativni!

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

Vezano za ovaj primer, pogledajmo recimo kompleksan broj $z=-1-i$

Za njega je $x=-1, y=-1$ $\quad r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

A za tangens dobijamo isto kao I za $z=1+i$:

$tg\varphi=\frac{y}{x}$

$tg\varphi=\frac{-1}{-1}$

$tg\varphi=1\Rightarrow\varphi=225^o=\frac{5\pi}{4}$

Sad smo za ugao uzeli 225^0. **Zašto?**

Pogledajmo sliku još jednom. U III kvadrantu su I sinus I kosinus negativni a to je ono što nam sad treba.

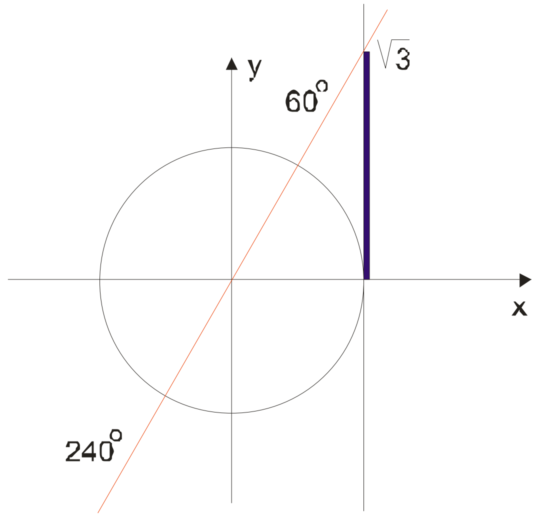
$z=-1-i$ ima trigonometrijski oblik $z=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

Ovo je jedna od zamki na koju treba da pazite kod prebacivanja kompleksnog broja u trigonometrijski oblik!

b) $z=1+i\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} x&=1 \\ y&=\sqrt{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$tg\varphi=\sqrt{3}$$
$$\varphi=60^o=\frac{\pi}{3}$$



$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

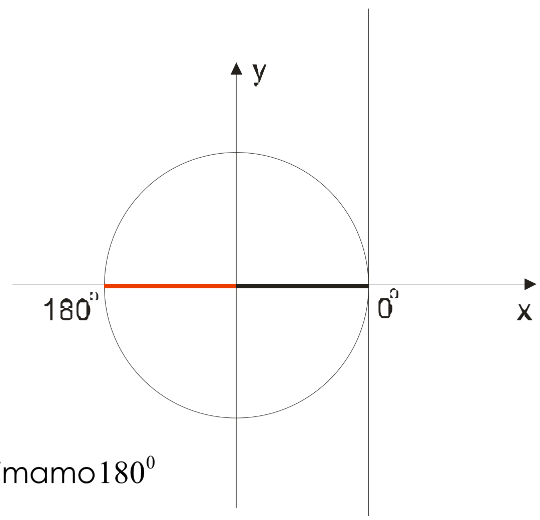
$$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

Napomena: Za komleksni broj $z=-1-i\sqrt{3}$ bi uzimali ugao od 240^0

v) $z=-1$ **Pazi: Ovo možemo zapisati i kao** $z=-1+0i$

Dakle:

$$x=-1, y=0$$
$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{0}{-1}=0$$
$$\varphi=180^o$$
$$\varphi=\pi$$



Zašto smo uzeli 180 stepeni?

Tangens ima vrednost 0 za 0^0 I 180^0

Ali, pošto nam treba negativan cosinus , uzimamo 180^0

$$r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$$
$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$z=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$$
$$\boxed{z=\cos\pi+i\sin\pi}$$

Napomena:

Da smo recimo prebacivali z = 1 u trigonometrijski oblik , dobili bi :

z = 1 je $z=\cos 0+i\sin 0$

g) $z = i$ ili $z = 0 + 1i \Rightarrow x = 0, y = 1$

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

Napomena:

Da smo recimo imali da prebacimo $z = -i$ imali bi:

$$z = 0 - 1i \Rightarrow x = 0, y = -1$$

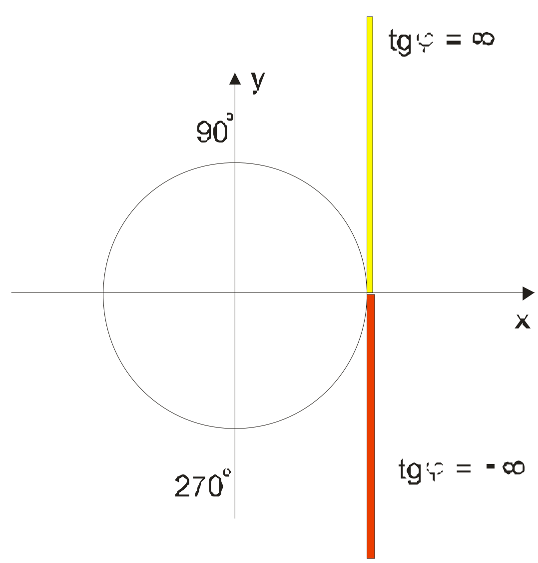
$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

Pa bi bilo $z = -i$ je $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

Pogledajmo sliku:



Često se u zadacima radi lakšeg rešavanja koristi **Ojlerova formula:**

$$\boxed{e^{xi} = \cos x + i\sin x}$$

Primer: **Napisati brojeve:**

a) 1

b) i

v) -2

preko Ojlerove formule.

Rešenje:

Savet: Ovde uvek dodajte periodičnost!

a) $z = 1$ tj, $x = 1, y = 0$

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \varphi = 0^o$$

$$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$$

$$z = 1 \cdot (\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi))$$

Dakle: $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, pa je zamenom u $e^{xi} = \cos x + i\sin x$ gde je $x = 2k\pi$

$$\boxed{1 = e^{2k\pi i}}$$

$$k \in Z$$

b) $z = i \quad \Rightarrow \quad z = 0 + 1i \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 1$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$$

$$z = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

Dakle $i = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

Pa je $i = e^{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i}$

$$k \in Z$$

v) $z=-2=2\cdot(-1)=$

-1 smo našli u prošlom primeru:

$$-1=\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)$$
$$-2=2\left[\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\right]$$

Znači

$$-2=2e^{(\pi+2k\pi)i}$$
$$\boxed{-2=2e^{(2k+1)\pi i}}$$
$$k\in Z$$

Profesori često vole da pitaju decu da nadju vrednosti i^i .

Kada znamo Ojlerov zapis, to nije teško.

U jednom prethodnom primeru smo našli:

$$i=e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$$
$$k\in Z$$

Onda je:

$$i^i=(e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i})^i$$

Znamo pravilo za stepenovanje $(a^m)^n=a^{mn}$

$$i^i=e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i^2}$$

$i^i=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ Znamo da je $i^2=-1$

$$k\in Z$$

Ako uzmemo k=0, biće:

$$\boxed{i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

Množenje i deljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku

Neka su data dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Onda je :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Primer: **Dati su kompleksni brojevi:**

$$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

Nadji:

a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $\frac{z_1}{z_2}$

Rešenje:

a)

$$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4})\right]$$
$$= 4\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$$
$$= 4\left[-1+0\right]$$
$$= -4$$

b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})\right]$$
$$= 8\left[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right] = 8\left[\cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2})\right]$$
$$= 8\left[0 - i\cdot 1\right] = -8i$$

Stepenovanje kompleksnog broja

Neka je dat kompleksni broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Onda je $\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$

Ako kompleksni broj ima modul 1, tj. ako je r=1 onda je:

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \rightarrow$ **Moavrov obrazac**

Primer

a) Nadji z^6 ako je $z = 2(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$

b) Nadji z^{20} ako je $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Rešenja:

a)

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$$

$$z^6 = 2^6(\cos 6\cdot\frac{\pi}{18} + i\sin 6\cdot\frac{\pi}{18})$$

$$z^6 = 2^6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z^6 = 64(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 32(1 + i\sqrt{3})$$

b) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ovde moramo najpre prebaciti kompleksni broj u trigonometrijski oblik.

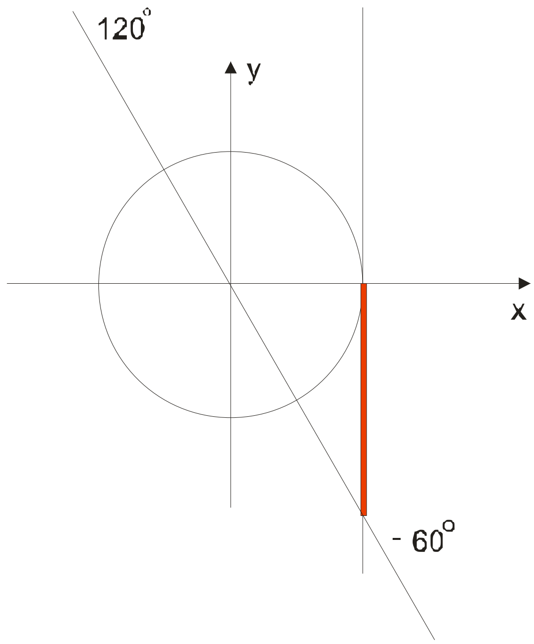
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \rightarrow tg\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow tg\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -60^o = -\frac{\pi}{3}$$

Zašto ovaj ugao iz IV kvadranta?

Zato što nam treba da je kosinus pozitivan a sinus negativan!

Da je obrnuta situacija, recimo za $z = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{odnosi se na cos}} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{\text{odnosi se na sin}}$ uzeli bi ugao od 120 stepeni!



Da se vratimo na zadatak:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z = 1(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$ Pazi: cosx je parna a sinx neparna funkcija

$\boxed{z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}$

Sad upotrebimo Moavrovu formulu:

$z^{20} = \cos\frac{20\pi}{3} - i\sin\frac{20\pi}{3}$ $\rightarrow pazi \frac{20\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$z^{20} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$

$z^{20} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{z^{20} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})}$

<u>Korenovanje kompleksnih brojeva:</u>

Neka je dat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Tada je:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})}$$

k- uzima vrednosti od 0 do n-1.

Sve vrednosti n-tog korena broja z, nalaze se na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$.

Argumenti tih brojeva (vrednosti korena) čine aritmetički niz sa razlikom $d = \frac{2\pi}{n}$.

<u>Primer</u>

Izračunati:

a) $\sqrt[3]{i}$

b) $\sqrt[6]{-1}$

<u>Rešenja:</u>

a) Kao što smo već videli :

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

Primenom formule $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$ gde je n=3 imamo

$$\sqrt[3]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$$ gde k uzima vrednosti: $k = 0,1,2$

Za k=0

$$w_o = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}$$

$$w_o = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{w_o = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}$$

Za k=1

$$w_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}$$

$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$\boxed{w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}$$

Za k=2

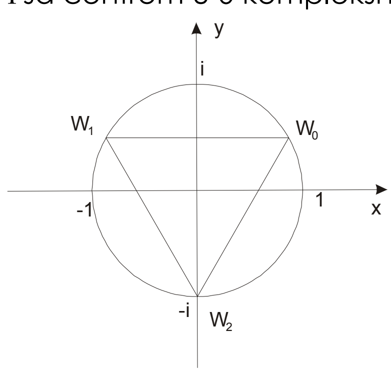
$$w_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}$$

$$w_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}$$

$$\boxed{w_2 = -i}$$

Geometrijski gledano , w_o, w_1, w_2 su temena jednakostraničnog trougla na kružnici

poluprečnika $r = \sqrt[3]{1} = 1$ sa centrom u 0 kompleksne ravni!



b) $-1=\cos\pi+i\sin\pi \qquad r=1,\varphi=\pi$

$$\sqrt[6]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$$
$$k=0,1,2,3,4,5$$

<u>Za k=0</u>

$$w_o=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

<u>Za k=1</u>

$$w_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{6}$$
$$w_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

<u>Za k=2</u>

$$w_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{6}$$
$$w_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$$

<u>Za k=3</u>

$$w_3=\cos\frac{\pi+6\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{6}$$
$$w_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

<u>Za k=4</u>

$$w_4=\cos\frac{\pi+8\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+8\pi}{6}$$
$$w_4=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-i$$

Za k=5

$$w_5 = \cos\frac{\pi + 10\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 10\pi}{6}$$

$$w_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Geometrijski gledano, $w_o,...,w_5$ su temena pravilnog šestougla!