

240. Одредити обим и површину круга полупречника $r = 7\text{cm}$ (за број π узети приближну вредност 3,14).

$$r = 7\text{cm}$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$O = ?$$

$$P = ?$$

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 7 \cdot 3,14$$

$$O = 43,96\text{cm}$$

$$P = r^2\pi$$

$$P = 7^2\pi$$

$$P = 49 \cdot 3,14$$

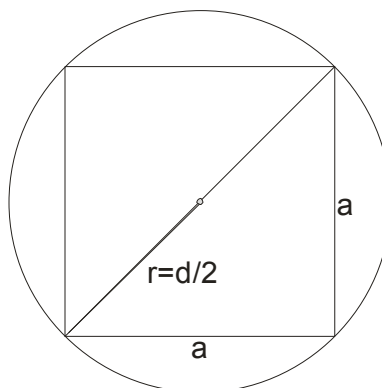
$$P = 153,86\text{cm}^2$$

241. Површина квадрата је 12cm^2 . Одредити површину круга који је описан око тог квадрата.

$$P_{kv} = 12\text{cm}^2$$

$$P_{kr} = ?$$

Нартајмо најпре слику и уočимо везу између података...



Poluprečnik kruga je polovina dijagonale kvadrata!

Iz površine kvadrata ćemo naći dužinu stranice , a zatim i dijagonalu:

$$P = a^2$$

$$12 = a^2$$

$$a = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{3}\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

Nadjimo poluprečnik:

$$r = \frac{d}{2}$$

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{2}$$

$$r = \sqrt{6} \text{ cm}$$

$$P = r^2 \pi$$

$$P = \sqrt{6}^2 \pi$$

$$P = 6\pi \text{ cm}^2$$

242. Одредити пречник и површину круга чији је обим 31,4 cm и $\pi \approx 3,14$.

$$O = 31,4 \text{ cm}$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$2r = ?$$

$$P = ?$$

Iz formule za obim kruga ćemo naći dužinu poluprečnika (prečnika).

$$O = 2r\pi$$

$$31,4 = 2r \cdot 3,14$$

$$2r = \frac{31,4}{3,14}$$

$$2r = 10 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$P = r^2 \pi$$

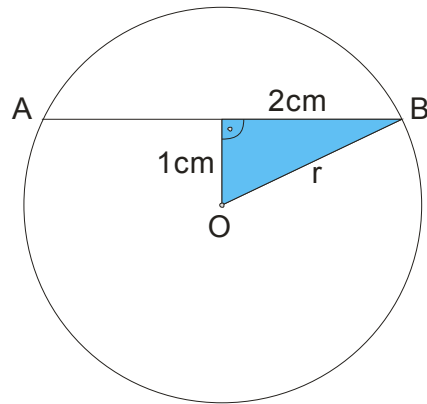
$$P = 5^2 \pi$$

$$P = 25 \cdot 3,14$$

$$P = 78,5 \text{ cm}^2$$

243. Дужина тетиве AB датог круга је 4 cm, а њено растојање од центра круга 1 cm. Одредити површину тог круга.

Nacrtajmo sliku najpre:



Polovina tetive AB je 2cm, i ona sa rastojanjem od centra kruga i poluprečnikom pravi pravougli trougao, na kome primenjujemo Pitagorinu teoremu.

Dakle:

$$r^2 = 2^2 + 1^2$$

$$r^2 = 4 + 1$$

$$r^2 = 5$$

Namerno nismo tražili r , jer nam za površinu treba:

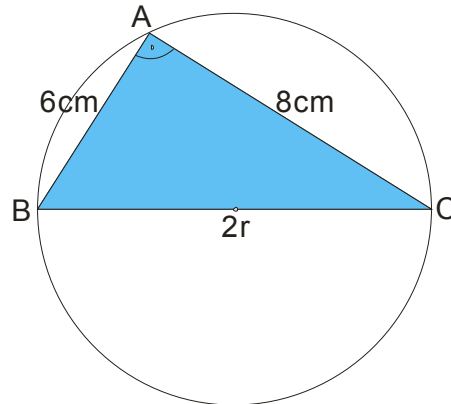
$$P = r^2 \pi$$

$$P = 5\pi$$

$$P = 5\pi \text{ cm}^2$$

244. Тетиве AB и AC једног круга су ортогоналне и дужина 6 cm и 8 cm. Одредити полупречник и обим тог круга.

I ovde je neophodna slika:



Pošto u zadatku kaže da su tetive ortogonalne (normalne) , one sa prečnikom grade pravougli trougao, pa ćemo tu činjenicu iskoristiti i uz pomoć Pitagorine teoreme naći poluprečnik:

$$(2r)^2 = 6^2 + 8^2$$

$$4r^2 = 36 + 63$$

$$4r^2 = 100$$

$$r^2 = \frac{100}{4}$$

$$r^2 = 25$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5\text{cm}$$

Sada tražimo obim:

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 5\pi$$

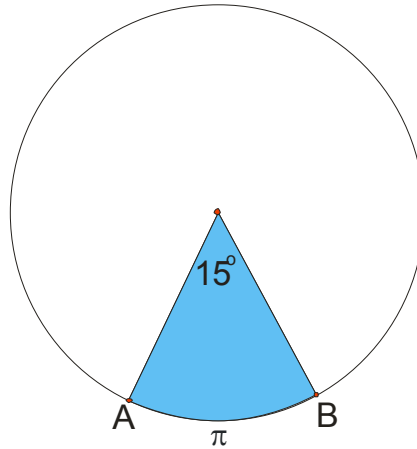
$$O = 10\pi\text{cm}$$

245. Дужина кружног лука AB једног круга је π см, а централни угао над тим луком 15° .
Одредити обим тог круга.

$$l = \pi$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$O = ?$$



Znamo da se dužina kružnog luka računa:

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} \text{ odnosno}$$

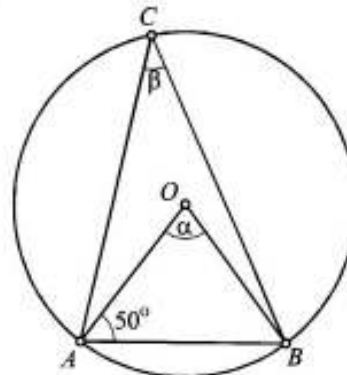
$$l = \frac{O \cdot \alpha}{360^\circ} \text{ zamenimo date podatke}$$

$$\pi = \frac{O \cdot 15^\circ}{360^\circ}$$

$$\pi = \frac{O}{24}$$

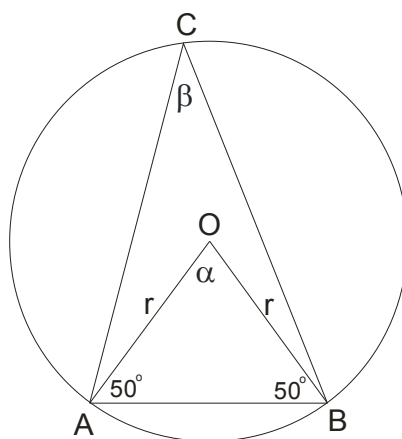
$$O = 24\pi \text{ cm}$$

246. Ако су ознаке као на приложеном цртежу и $\angle BAO = 50^\circ$, одредити назначене углове α и β .



Ako posmatramo trougao ABO, možemo zaključiti da je on jednakokraki, jer su mu dve stranice poluprečnici kruga!

Onda su uglovi OAB i OBA jednaki i iznose po 50 stepeni: $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 50^\circ$



Traženi centralni ugao alfa ćemo naći:

$$\alpha = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ)$$

$$\alpha = 180^\circ - 100^\circ$$

$$\alpha = 80^\circ$$

Nad istim lukom centralni ugao je dva puta veći od periferijskog, dakle:

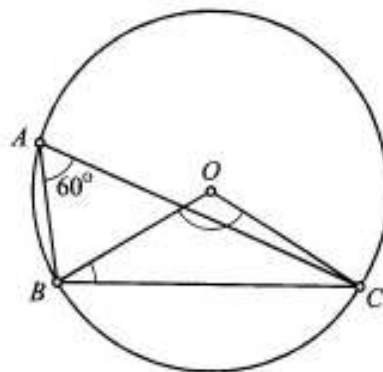
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

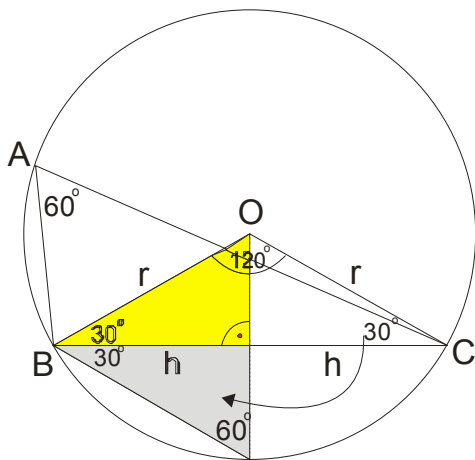
$$\beta = \frac{80^\circ}{2}$$

$$\beta = 40^\circ$$

247. Угао између две тетиве AB и AC једног круга је 60° . Ако је полупречник тог круга $r = 6$ cm и тачка O његов центар, одредити:

- A) угао BOC ;
- Б) угао OBC ;
- В) дужину тетиве BC .





Najpre uočimo da je ugao BAO od 60 stepeni periferijski nad lukom BC.

Njemu odgovarajući centralni ugao BOC mora biti dva puta veći:

$$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC$$

$$\angle BOC = 2 \cdot 60^\circ$$

$$\angle BOC = 120^\circ$$

Kako je trougao BOC jednakokraki, možemo izračunati i njegova dva preostala ugla:

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Dužina tetive BC je ustvari sastavljena od dve visine jednakostraničnog trougla stranice $a = r = 6\text{cm}$

$$h_\Delta = \frac{a_\Delta \sqrt{3}}{2}$$

$$BC = 2h = 2 \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

248. Обим круга је 62,8 cm. Колики је централни угао α који одговара кружном луку дужине 12,56 cm ($\pi \approx 3,14$)?

$$O = 62,8 \text{ cm}$$

$$l = 12,56 \text{ cm}$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$\alpha = ?$$

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} \text{ odnosno}$$

$$l = \frac{O \cdot \alpha}{360^\circ} \text{ zamenimo date podatke}$$

$$12,56 = \frac{62,8 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

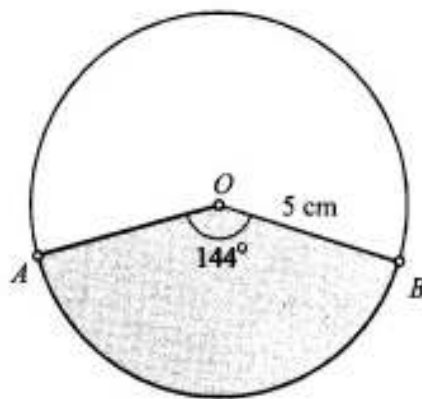
$$62,8 \cdot \alpha = 12,56 \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{12,56 \cdot 360^\circ}{62,8} \text{ skratimo}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\alpha = 72^\circ$$

249. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину кружног лука AB и површину одговарајућег исечка ($\pi \approx 3,14$).



Sa crteža možemo “ pročitati” da je :

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$\alpha = 144^\circ$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

$$l = \frac{5 \cdot 3,14 \cdot 144^\circ}{180^\circ}$$

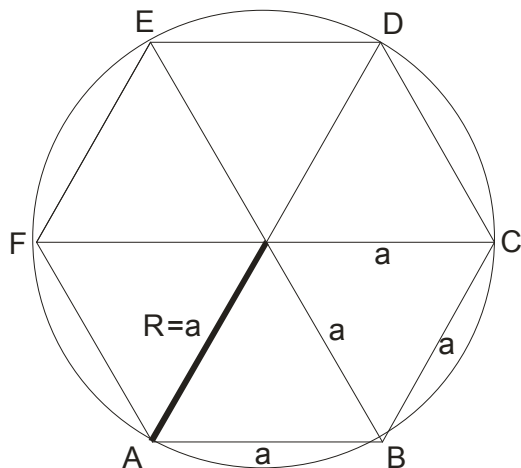
$$l = 12,56 \text{ cm}$$

$$P = \frac{r \cdot l}{2}$$

$$P = \frac{5 \cdot 12,56}{2}$$

$$P = 31,4 \text{ cm}^2$$

250. Правилни šestoугao je upisan u krug površine $64\pi \text{ cm}^2$. Odrediti obim tog šestoугla.



Iz površine kruga ćemo naći poluprečnik, a znamo da je on jednak stranici šestoугla (vidi sliku)

$$P = r^2\pi$$

$$64\pi = r^2\pi$$

$$r^2 = 64$$

$$r = \sqrt{64}$$

$$r = 8 \text{ cm}$$

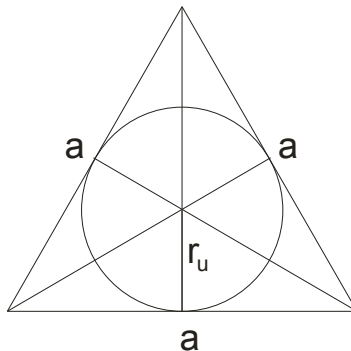
Kako je $r = a = 8 \text{ cm}$, to je obim šestoугla jednak:

$$O_s = 6a$$

$$O_s = 6 \cdot 8$$

$$O_s = 48 \text{ cm}^2$$

251. Висина једнакостраничног троугла је 6 cm. Одредити обим и површину круга који је уписан у тај троугао.



Znamo da je poluprečnik upisane kružnice jednak trećini visine!

$$r_u = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ cm}$$

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 2\pi$$

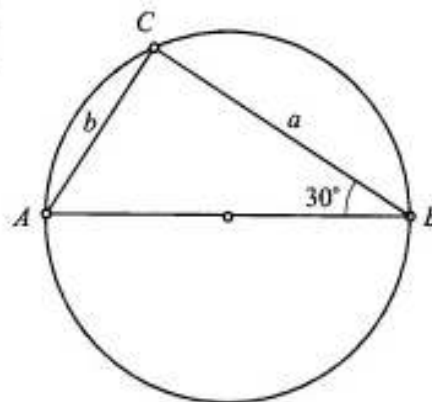
$$O = 4\pi \text{ cm}$$

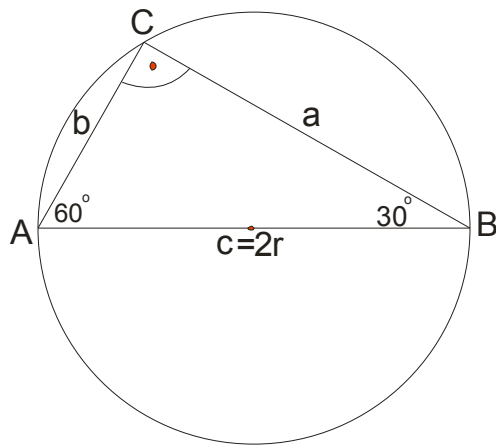
$$P = r^2\pi$$

$$P = 2^2\pi$$

$$P = 4\pi \text{ cm}^2$$

252. Један угао правоуглог троугла ABC је $\beta = 30^\circ$, а површина његовог описаног круга је $P = 36 \pi \text{ cm}^2$. Одредити катете тог троугла.





Kako se centar opisane kružnice nalazi na sredini najduže stranice(hipotenuze) , zaključujemo da se radi o pravouglom trouglu!

Naravno, odmah možemo zaključiti da je ugao BAC jednak 60° .

Iz površine kruga ćemo naći poluprečnik:

$$P = r^2 \pi$$

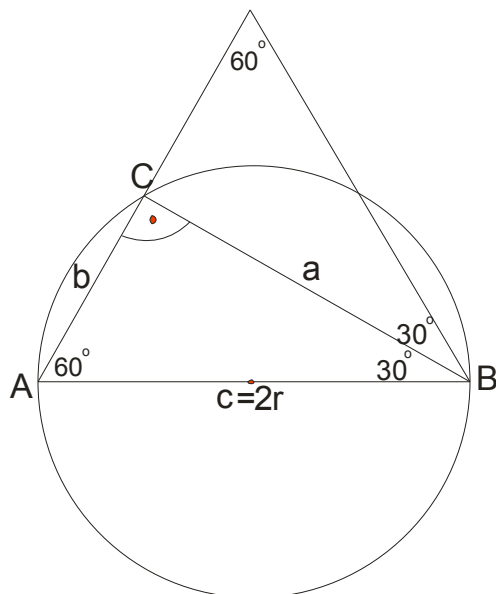
$$36\pi = r^2 \pi$$

$$r^2 = 36$$

$$r = \sqrt{36}$$

$$r = 6\text{cm}$$

Kako je $c = 2r$, zaključujemo da je : **$c = 12\text{cm}$**



Trougao ABC je sa ovim uglovima od 30, 60 i 90 stepeni ustvari polovina jednakostraničnog trougla ,
 stranice $c = 12\text{cm}$!

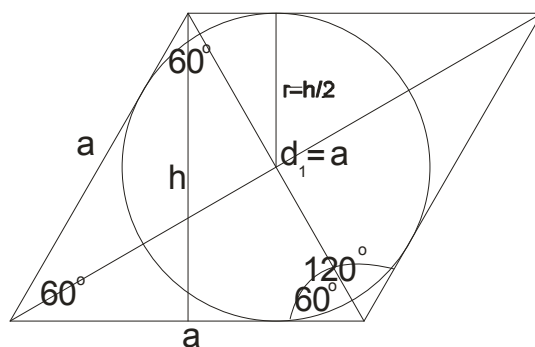
$$b = \frac{c}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

Stranica a je visina tog jednakostraničnog trougla stranice 12 cm, pa je :

$$a = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

253. Страница ромба је $a = 4\sqrt{3}$ см, а један његов угао 120° . Одредити површину круга који је уписан у тај ромб.

I ovde je neophodna slika:



Kako je jedan ugao romba 120° , znamo da će drugi ugao biti $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Na taj način smo dobili jednakostanični trougao i zaključujemo da je $d_1 = a$.

Poluprečnik upisanog kruga kod romba jednak je polovini visine!

A visina je visina jednakostraničnog trougla stranice

$$a = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Dakle:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$h = 6 \text{ cm}$$

$$r = \frac{h}{2} = \frac{6}{2}$$

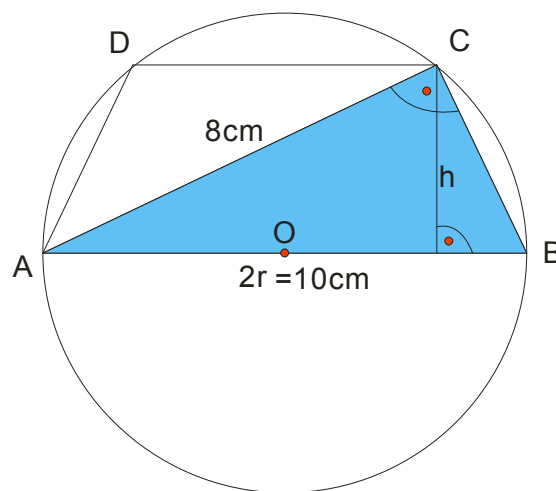
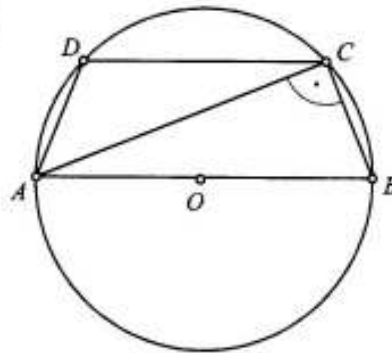
$$r = 3 \text{ cm}$$

$$P = r^2 \pi$$

$$P = 3^2 \pi$$

$$P = 9\pi \text{ cm}^2$$

254. Центар круга описаног око трапеца $ABCD$ је на основици AB . Ако је $AB = 10 \text{ cm}$ и $AC = 8 \text{ cm}$, одредити крак и висину тог трапеца.



Uočimo trougao ABC . On je svakako pravougli. Pitagorina teorema će nam dati krak BC

$$BC^2 = 10^2 - 8^2$$

$$BC^2 = 100 - 64$$

$$BC^2 = 36$$

$$BC = \sqrt{36}$$

$$BC = 6\text{cm}$$

Visina trapeza je i visina trougla ABC, preko formule je:

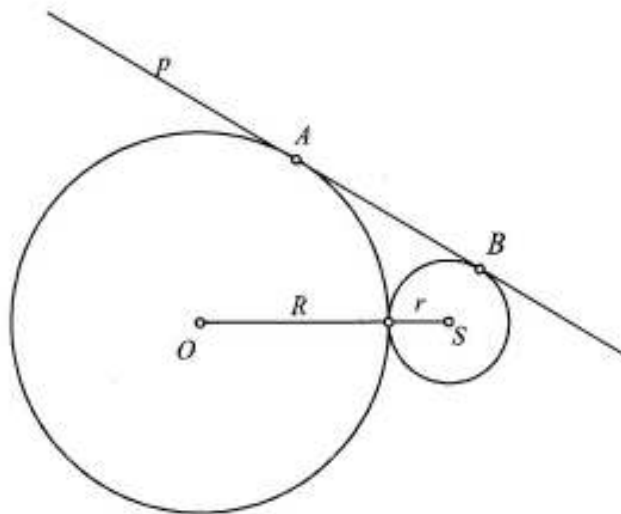
$$h_c = \frac{a \cdot b}{c} \text{ (za pravougli trougao)}$$

$$h = \frac{6 \cdot 8}{10}$$

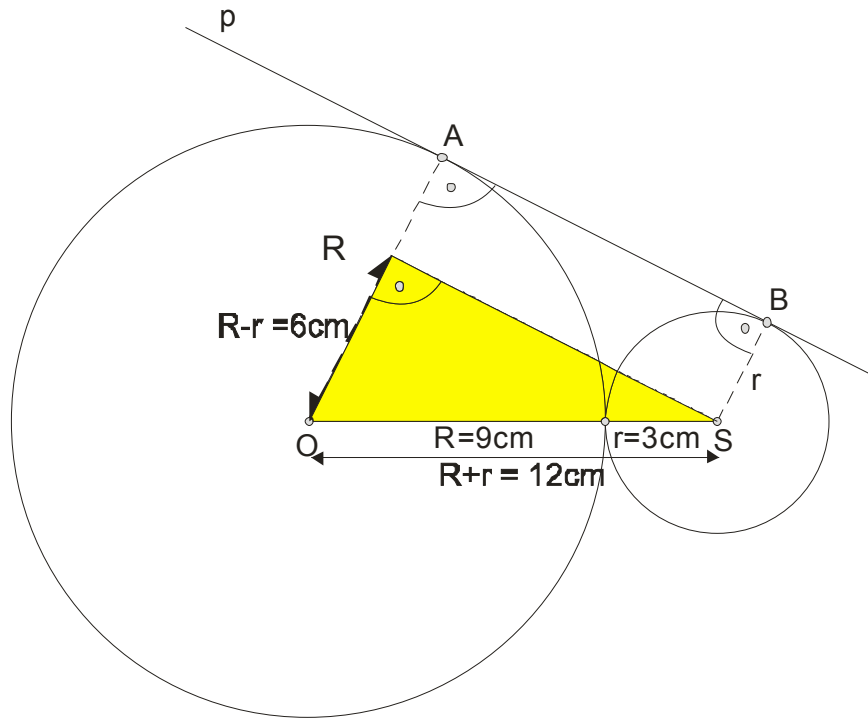
$$h = \frac{48}{10}$$

$$h = 4,8\text{cm}$$

255. Кругови $k(O, R)$ и $k_1(S, r)$ се додирују споља. Права p додирује те кругове у тачкама A и B . Ако је $R = 9\text{ cm}$ и $r = 3\text{ cm}$, одредити AB .



Dopunimo najpre datu sliku:



Prava p je tangenta oba kruga. Ako spojimo O i A , S i B , dobijamo pravougli trapez $OABS$. Što pravougli?

Jer znamo da je tangenta normalna na poluprečnik (u tačkama A i B).

Tražena dužina AB je ustvari visina tog pravouglog trapeza!

Primenom Pitagorine teoreme na označeni trougao dobijamo:

$$AB^2 = 12^2 - 6^2$$

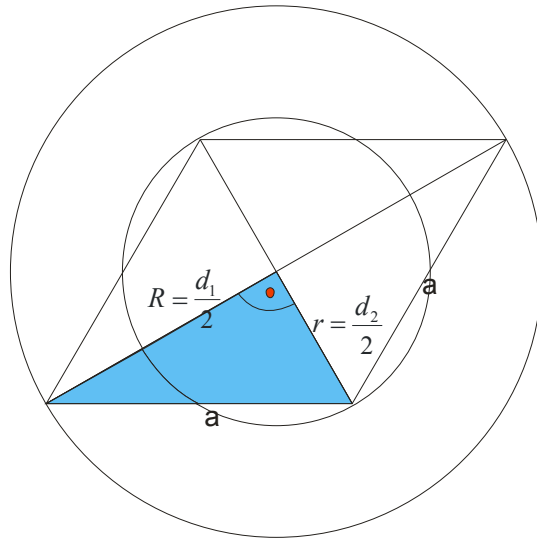
$$AB^2 = 144 - 36$$

$$AB^2 = 108$$

$$AB = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

256. Пречници кругова k_1 и k_2 су дијагонале AC и BD ромба $ABCD$ чија је страница $a = 5$ cm. Одредити збир површина та два круга.

I ovde je slika vrlo bitna:



Poluprečnici krugova su dakle polovine dijagonala (vidi sliku).

Ako pokušamo da nađemo te poluprečnike , nećemo uspeti!

Ovaj zadatak se radi drugačije.

Nama se traži zbir površina ta dva kruga, pa je :

$$P_1 + P_2 = R^2\pi + r^2\pi$$

$$= \pi(R^2 + r^2)$$

Zastanimo ovde malo i primenimo Pitagorinu teoremu:

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$

$$R^2 + r^2 = a^2$$

$$R^2 + r^2 = 5^2$$

$$R^2 + r^2 = 25$$

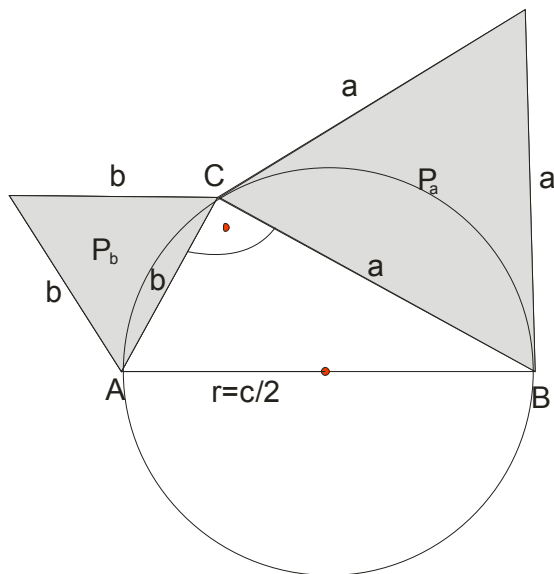
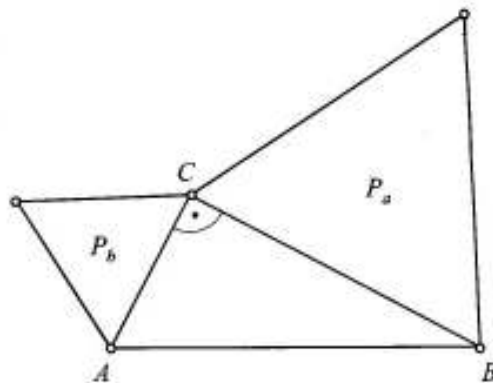
Vratimo se u zadatak:

$$P_1 + P_2 = R^2\pi + r^2\pi$$

$$= \pi(R^2 + r^2) \text{ zamenimo da je } R^2 + r^2 = 25$$

$$= 25\pi\text{cm}^2$$

257. Над катетама правоуглог троугла ABC су конструисани једнакостранични троуглови чије су површине $P_a = 64 \sqrt{3} \text{ cm}^2$ и $P_b = 36 \sqrt{3} \text{ cm}^2$. Одредити површину круга који је описан око троугла ABC .



Najpre ćemo iz površina trouglova naći dužine kateta a i b .

$$P_a = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P_b = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$64\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$36\sqrt{3} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$64 = \frac{a^2}{4}$$

$$36 = \frac{b^2}{4}$$

$$a^2 = 64 \cdot 4$$

$$b^2 = 36 \cdot 4$$

$$a^2 = 256$$

$$b^2 = 144$$

$$a = \sqrt{256}$$

$$b = \sqrt{144}$$

$$a = 16 \text{ cm}$$

$$b = 12 \text{ cm}$$

Primenom Pitagorine teoreme nalazimo dužinu hipotenuze c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16^2 + 12^2$$

$$c^2 = 256 + 144$$

$$c^2 = 400$$

$$c = \sqrt{400}$$

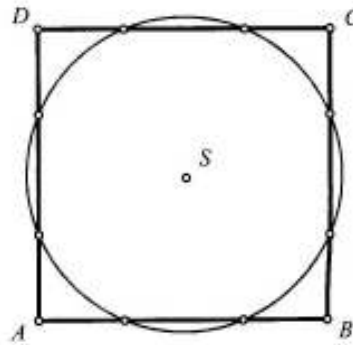
$$c = 20\text{cm}$$

Znamo da se centar opisane kružnice kod pravouglog trougla nalazi na sredini hipotenuze:

$$r = \frac{c}{2} = \frac{20}{2} = 10\text{cm}$$

$$P = r^2 \pi = 10^2 \pi = 100\pi\text{cm}^2$$

258. Површина датог квадрата $ABCD$ је 36 cm^2 .
Одредити површину круга k чији је центар
средиште S тог квадрата и који његову
страницу AB дели на три једнака дела.



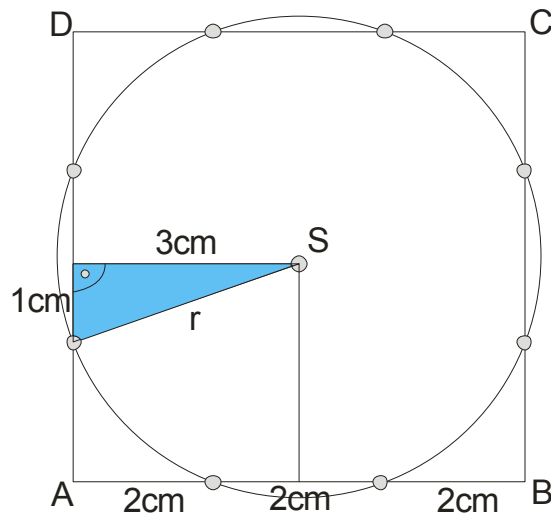
Iz površine kvadrata ćemo naći dužinu stranice kvadrata:

$$P = a^2$$

$$36 = a^2$$

$$a = \sqrt{36}$$

$$a = 6\text{cm}$$



Pošto je cela stranica 6cm, svaki od malih delića biće po 2cm.

Primenom Pitagorine teoreme na označeni trougao , nalazimo poluprečnik r.

$$r^2 = 3^2 + 1^2$$

$$r^2 = 9 + 1$$

$$r^2 = 10$$

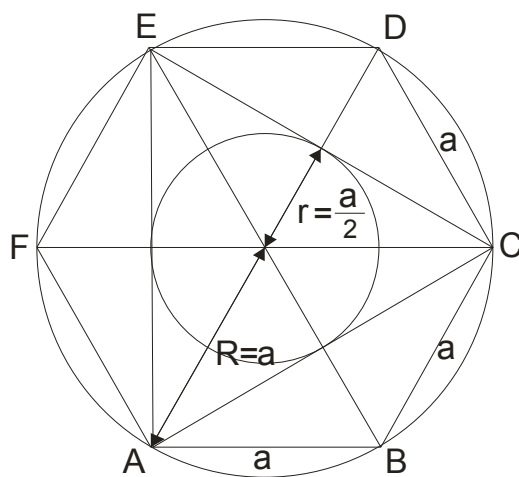
$$r = \sqrt{10} \text{ cm}$$

Površina kruga je onda:

$$P = r^2 \pi$$

$$P = 10\pi \text{ cm}^2$$

259. Круг k је описан око правилног шестоугла $ABCDEF$ странице 6 cm, а круг k_0 уписан у троугао ACE . Одредити површину њиховог кружног прстена.



Nađimo najpre dužine poluprečnika (R i r) .

$$R = a = 6 \text{ cm}$$

$$r = \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Formula za površinu kružnog prstena je:

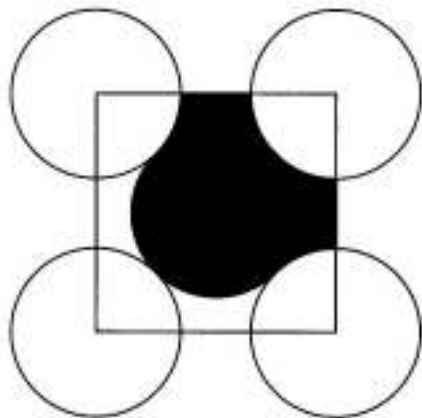
$$P_{kp} = (R^2 - r^2) \pi$$

$$P_{kp} = (6^2 - 3^2) \pi$$

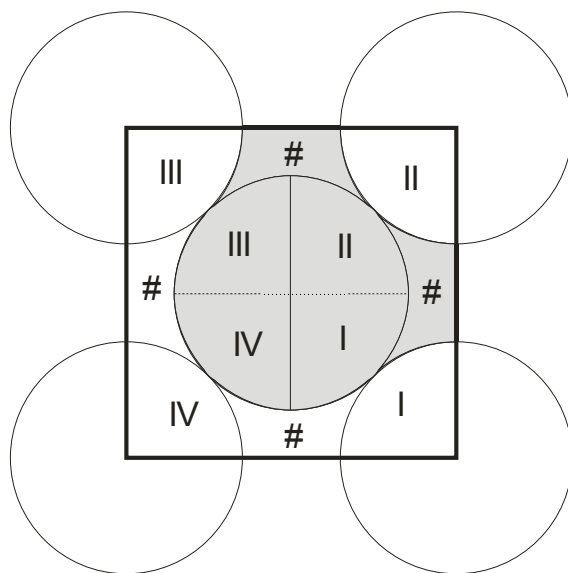
$$P_{kp} = (36 - 9) \pi$$

$$P_{kp} = 27\pi \text{ cm}^2$$

260. На приложеном цртежу, сви кругови су полупречника $r = 1$ cm. Центри четири од њих су темена квадрата и они додирују пети круг споља. Одредити површину ошенчене фигуре.



Proučimo najpre datu sliku:

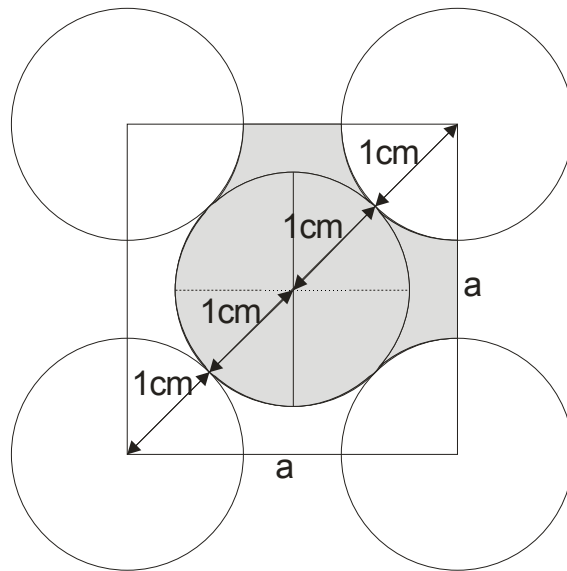


Krug unutar smo podelili na 4 dela. Svaki od tih delova odgovara po jednoj četvrtini krugova oko.

Delići obeleženi sa # su takođe isti. Šta zaključujemo?

POVRŠINA OSENČENE FIGURE JE JEDNAKA POLOVINI POVRŠINE KVADRATA!

Dakle, da nađemo površinu kvadrata i to podelimo sa 2.



DIJAGONALA KVADRATA SE SASTOJI IZ 4 POLUPREČNIKA!

$$d = 4r$$

$$d = 4 \cdot 1$$

$$d = 4\text{cm}$$

Dalje ćemo naći površinu kvadrata:

$$P_{kv} = \frac{d^2}{2}$$

$$P_{kv} = \frac{4^2}{2}$$

$$P_{kv} = \frac{16}{2}$$

$$P_{kv} = 8\text{cm}^2$$

I konačno, površina osenčenog dela je:

$$P_{od} = \frac{P_{kv}}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}^2$$