

4. UČENIK RAZLIKUJE DIREKTNO I OBRNUTO PROPORCIONALNE VELIČINE, ZNA LINEARNU FUNKCIJU I GRAFIČKI INTERPRETIRA NJENA SVOJSTVA

U fajlu 4. iz srednjeg nivoa smo se upoznali sa postupkom rada kada je u pitanju direktna proporcionalnost.

Sada ćemo uraditi nekoliko primera sa obrnutom proporcionalnošću.

Primer 1.

Ako dnevno radi 7 časova, jedan radnik posao završi za 15 dana. Koliko časova dnevno bi radnik trebalo da radi da bi isti posao završio za 12 dana?

Rešenje:

Najpre zapišemo podatke (slika 1.)

7 čas.....15 dana
x čas.....12 dana

slika 1.

↑ 7 čas.....15 dana
↑ x čas.....12 dana

slika 2.

↑ 7 čas.....15 dana
↑ x čas.....↓12 dana

slika 3.

Napišemo strelicu od x na gore (slika 2.)

Sad razmišljamo: Da li je x veći ili manji od gornjeg broja?

15 dana bi radili ako radimo po 7 časova, a ako hoćemo da radimo 12 dana, onda logično moramo dnevno da radimo više časova. Dakle, zaključili smo da strelica ide od “**većeg ka manjem broju**” pa tako udarimo i drugu strelicu, od 15 dana ka 12 dana.

Sad pratimo smer strelica (slika 3.):

$$x : 7 = 15 : 12$$

$$12x = 7 \cdot 15$$

$$x = \frac{7 \cdot \cancel{15}^5}{\cancel{12}_4}$$

Čas ima 60 minuta, a $\frac{3}{4}$ časa su 45 minuta.

$$x = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4} \text{ časova}$$

$$x = 8 \text{ časa } 45 \text{ minuta}$$

Primer 2.

Zupčanik ima 54 zupca i pravi 84 obrtaja u minutu . Koliko zupca ima zupčanik ako pravi 126 obrtaja i u prenosu je sa prvim?

Rešenje:

Ako su zupčanici u prenosu jedan s drugim, jasno je da se jedan okreće na jednu a drugi na suprotnu stranu.

$$\begin{array}{l} 54 \text{ zub} \dots\dots\dots 84 \text{ obr.} \\ x \text{ zub} \dots\dots\dots 126 \text{ obr.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow 54 \text{ zub} \dots\dots\dots 84 \text{ obr.} \\ \uparrow x \text{ zub} \dots\dots\dots 126 \text{ obr.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow 54 \text{ zub} \dots\dots\dots \downarrow 84 \text{ obr.} \\ \uparrow x \text{ zub} \dots\dots\dots \downarrow 126 \text{ obr.} \end{array}$$

$$x : 54 = 84 : 126$$

$$126x = 84 \cdot 54$$

$$x = \frac{84 \cdot 54}{126}$$

$$\boxed{x = 36 \text{ zubaca}}$$

Primer 3.

Jedna prostorija je osvetljena sa 15 sijalica od 60 W. Koliko bi sijalica od 75 W davalo isto osvetljenje?

Rešenje:

Pazi: Ako uzmemo jače sijalice, manji broj će davati isto osvetljenje!

$$\begin{array}{l} 15 \text{ sij} \dots\dots\dots 60 \text{ W} \\ x \text{ sij} \dots\dots\dots 75 \text{ W} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow 15 \text{ sij} \dots\dots\dots 60 \text{ W} \\ \uparrow x \text{ sij} \dots\dots\dots 75 \text{ W} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow 15 \text{ sij} \dots\dots\dots \downarrow 60 \text{ W} \\ \uparrow x \text{ sij} \dots\dots\dots \downarrow 75 \text{ W} \end{array}$$

$$x : 15 = 60 : 75$$

$$75x = 15 \cdot 60$$

$$x = \frac{15 \cdot 60}{75}$$

$$\boxed{x = 12 \text{ sijalica}}$$

Primer 4.

Radeći dnevno po 8 časova ,28 radnika za 17 dana asfaltiraju 5440 metara puta. Koliko dana će raditi 42 radnika na sledećoj deonici puta, dužine 5040 metara radeći dnevno po 7 časova.

Rešenje:

Ovde se radi o takozvanoj produženoj proporciji i postoje više načina da se reši zadatak.

I način

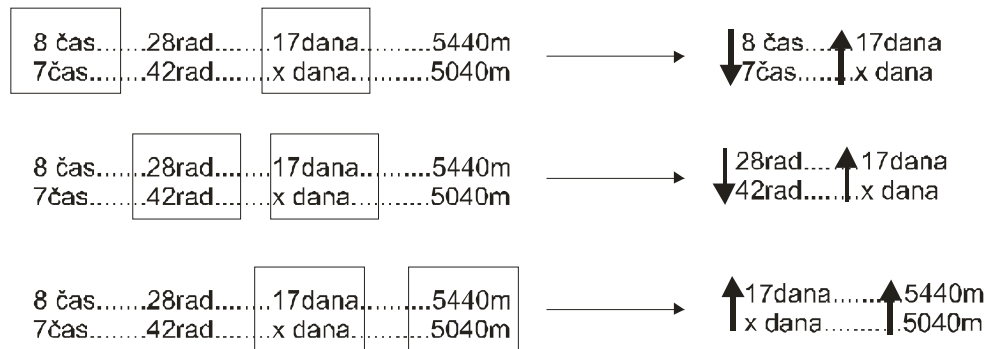
Zapišemo podatke kao da je u pitanju obična proporcija:

8 čas.....28rad.....17dana.....5440m
7čas.....42rad.....x dana.....5040m

Napišemo strelicu od x na gore kao i obično:

8 čas.....28rad..... \uparrow 17dana.....5440m
7čas.....42rad..... \uparrow x dana.....5040m

E sad je trik da ovaj podatak posmatramo posebno sa svakim i udaramo strelice:



Sad ove strelice prenesemo na početnu postavku:



Vi naravno ne morate sve postupno već odmah strelice udarate na početnoj postavki, ali je bitno da svaki podatak posmatrate sa X dana prema 17 dana.

Sad pratimo strelice i pravimo proporciju, ali pazite, podaci se zapisuju jedan ispod drugog:

$$\begin{aligned}x : 17 &= 8 : 7 \\ &= 28 : 42 \\ &= 5040 : 5440\end{aligned}$$

Sad pomnožimo sve spoljašnje i sve unutrašnje (spoljašnji su uokvireni)

$$\begin{aligned} x : 17 &= 8 : 7 \\ &= 28 : 42 \\ &= 5040 : 5440 \end{aligned}$$

$$x \cdot 7 \cdot 42 \cdot 5440 = 17 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 5040$$

Pazi: jednako pišemo ispod jednako!

$$x = \frac{17 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 5040}{7 \cdot 42 \cdot 5440}$$

$$x = 12 \text{ dana}$$

II način

Ideja ovog drugog načina je da se grupišu podaci.

Obeležimo sa x broj traženih dana. Razmišljamo kolika je cena (vrednost) pravljenja puta?

Iz rečenice zadatka: **Radeći dnevno po 8 časova ,28 radnika za 17 dana asfaltiraju 5440 metara puta,** možemo zaključiti da je **vrednost 5440 metara puta u radnim časovima 8*28*17.**

Iz druge rečenice : **Koliko dana će raditi 42 radnika na sledećoj deonici puta, dužine 5040 metara radeći dnevno**

po 7 časova, zaključujemo da je **vrednost 5040 metara puta u radnim časovima 7*42*X.**

Možemo zapisati:

$$\begin{array}{l} 5440 \text{ m.} \dots\dots\dots 28 \cdot 17 \cdot 8 \text{ radnih sati} \\ 5040 \text{ m.} \dots\dots\dots 42 \cdot 7 \cdot x \text{ radnih sati} \end{array} \quad \text{pa je} \quad \begin{array}{l} \uparrow 5440 \text{ m.} \dots\dots\dots \uparrow 28 \cdot 17 \cdot 8 \text{ radnih sati} \\ \uparrow 5040 \text{ m.} \dots\dots\dots \uparrow 42 \cdot 7 \cdot x \text{ radnih sati} \end{array}$$

$$(42 \cdot 7 \cdot x) : (28 \cdot 17 \cdot 8) = 5040 : 5440$$

I opet se rešenje dobija x = 12 dana.

Vi naravno radite kako smatrate da vam je lakše.....

Primer 5.

65 radnika iskopa neki kanal za 23 dana. Posle 15 dana 13 radnika napusti posao. Koliko dana treba onima koji su ostali da završe ostatak posla.

Rešenje:

Ovde ne treba odmah upisivati podatak :

$$65 \text{ radnika} \dots\dots\dots 23 \text{ dana} \quad \text{već} \quad 65 \text{ radnika} \dots\dots\dots 8 \text{ dana}$$

Zašto?

U zadatku se kaže da je posle 15 dana otišlo 13 radnika, što znači da je ostalo $23 - 13 = 8$ dana

Za donji deo postavke ćemo uzeti $65 - 13 = 52$ radnika a nepoznata je x dana.

Dakle:

65 radnika.....	8 dana	→	↓ 65 radnika.....	↑ 8 dana
52 radnika.....	x dana		52 radnika.....	↑ x dana

$$x : 8 = 65 : 52$$

$$52x = 65 \cdot 8$$

$$x = \frac{65 \cdot 8}{52}$$

$$\boxed{x = 10 \text{ dana}}$$

Još jedna stvar o kojoj morate voditi računa je sledeća: Ovde nas u zadatku pitaju koliko treba dana da se završi ostatak posla, i tu je odgovor 10 dana.

Medjutim, da je bilo pitanje za koliko dana bi **ceo** posao onda bio završen, odgovor bi bio $15 + 10 = 25$ dana.

Još jedna napomena, najčešći slučajevi obrnute proporcionalnosi su:

Broj radnika ---- utrošak vremena

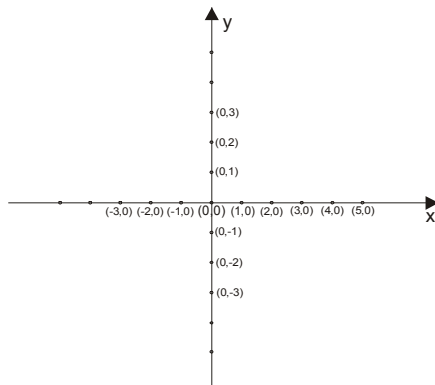
Brzina kretanja ---- vreme putovanja

Zupčanici ---- broj obrtaja

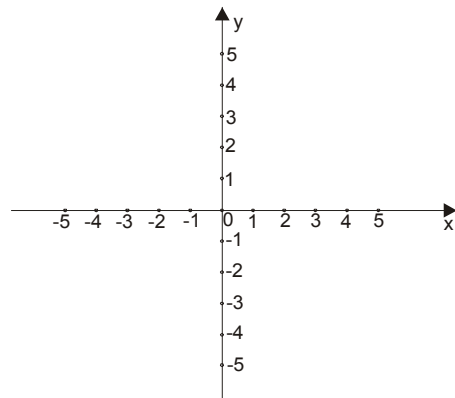
Dalje ćemo se podsetiti o koordinatnom sistemu i linearnoj funkciji!

Koordinate

U koordinatnom sistemu xOy , svaka tačka je određena svojom *apscisom* x i *ordinatom* y , i tu tačku zapisujemo kao uređeni par (x,y) . Na slici taj pravougli koordinatni sistem izgleda:



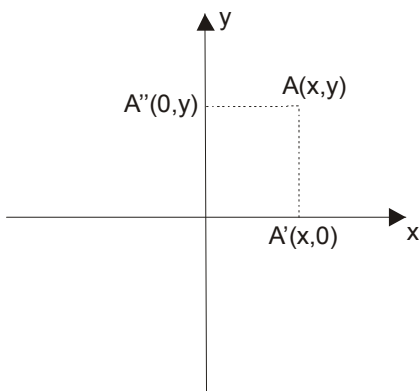
Pazite, možda su vam nastavnici, radi bržeg i lakšeg rada, crtali koordinatni sistem kao:



Znajte da je to bio samo dogovor i da svaka tačka uvek ima 2 koordinate:

- na x osi apscisu
- na y osi ordinatu

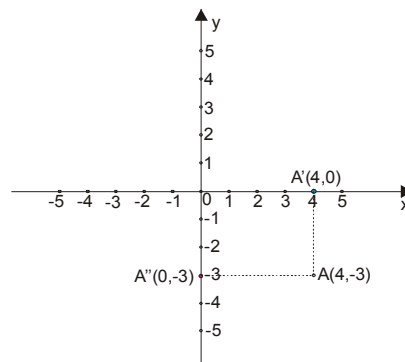
Posmatrajmo tačku $A(x,y)$.



Tačka A' ($x,0$) je ortogonalna projekcija tačke $A(x,y)$ na x osu.

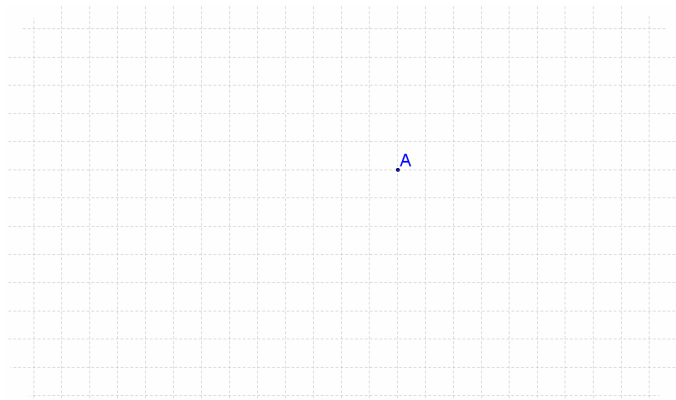
Tačka A'' ($0,y$) je ortogonalna projekcija tačke $A(x,y)$ na y osu.

Na primer, ako tačka A ima koordinate $A(4,-3)$, njene projekcije su:



Jedan od čestih zadataka je da se odrede koordinatne ose na osnovu koordinata date tačke.

Na primer, data nam je tačka $A(3,4)$.



Apscisa tačke A je $x=3$. Pazite, to je nama **na grafiku rastojanje od y-ose!**

Ako je to pozitivan broj idemo toliko mesta ulevo i tu je y – osa.

Ako je taj broj negativan , y-osa je udesno za taj broj.

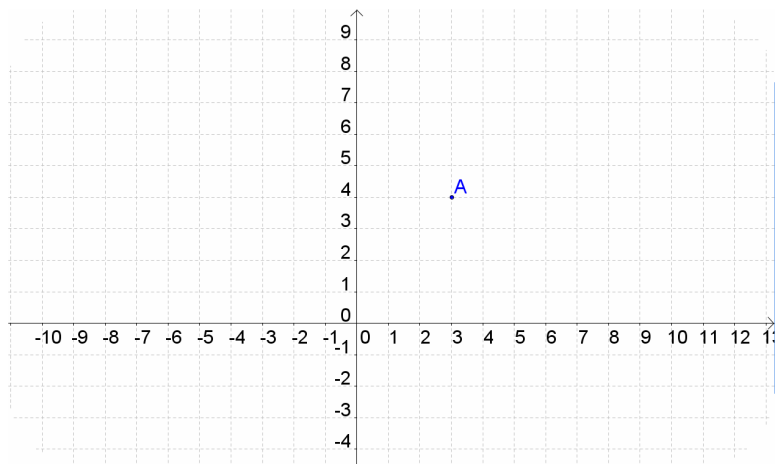
Za naš primer je y-osa 3 mesta ulevo!

Ordinata tačke A je $y = 4$. Pazite, to je nama na grafiku rastojanje od x-ose!

Ako je to pozitivan broj , idemo za toliko mesta nadole i tu je x – osa.

Ako je taj broj negativan, x-osa je nagore za taj broj.

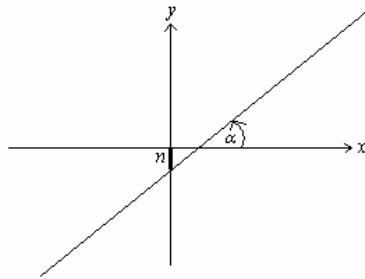
Za naš primer je x-osa 4 mesta nadole!



Najpoznatiji oblik linearne funkcije je: $y = kx + n$ (eksplicitni)

Grafik ove funkcije je prava.

k - je koeficijent pravca, α - je ugao koji prava gradi sa pozitivnim smerom x-ose, n - je odsečak na y-osi



Pošto je prava određena sa dve svoje tačke, grafik ucrtamo tako što u malu tablicu uzmemo 2 proizvoljne vrednosti za x , pa izračunamo y , ili još bolje, $x = 0$ i $y = 0$, pa nadjemo nepoznate...

Nula funkcije: je mesto gde grafik seče x-osu a dobija se kad stavimo $y = 0$ pa izračunamo koliko je x .

Funkcija može biti **rastuća** ili **opadajuća**.

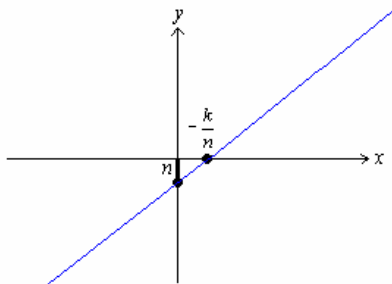
Ako je $k > 0$ funkcija je **rastuća** i sa pozitivnim smerom x-ose gradi oštar ugao.

Ako je $k < 0$ funkcija je **opadajuća** i sa pozitivnim smerom x-ose gradi tup ugao.

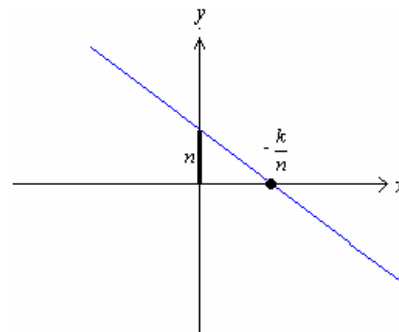
Znak funkcije:

Funkcija je **pozitivna** za $y > 0$ tj. $kx + n > 0$ i grafik je **iznad x-ose**.

Funkcija je **negativna** za $y < 0$ tj. $kx + n < 0$ i grafik je **ispod x-ose**



Rastuća



Opadajuća

$$y = 0 \text{ za } x = -\frac{n}{k}$$
$$y > 0 \text{ za } x \in \left(-\frac{n}{k}, \infty\right)$$
$$y < 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{n}{k}\right)$$

$$y = 0 \text{ za } x = -\frac{n}{k}$$
$$y > 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{n}{k}\right)$$
$$y < 0 \text{ za } x \in \left(-\frac{n}{k}, \infty\right)$$

Ako se u zadatku kaže da grafik prolazi kroz neku tačku (x_0, y_0) onda koordinate te tačke smemo da zamenimo umesto x i y u datoj jednačini $y = kx + n$

Dakle: $y_0 = kx_0 + n$

Dva grafika $y = kx_1 + n_1$ i $y = kx_2 + n_2$ će biti **paralelna** ako je $k_1 = k_2$, a **normalna** ako je $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Dakle:

- uslov paralelnosti je $k_1 = k_2$

- uslov normalnosti je $k_1 \cdot k_2 = -1$

www.matematiranje.in.rs