DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA RAZDVOJENOM PROMENLJIVOM

Ova diferencijabilna jednačina je oblika $y` = f(x) \cdot g(y)$**.**

Šta je ideja?

Uvek se menja da je $\boxed{y` = \frac{dy}{dx}}$ **a onda se "sve sa *x*" prebaci na jednu stranu a "sve sa *y*" na drugu.**

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Prilikom množenja ili deljenja nekim izrazom u cilju razdvajanja promenljivih, trebalo bi postaviti uslov da to čime množimo odnosno delimo, bude različito od nule.Neki profesori to traže, neki ne, a naš savet je kao i uvek da radite kako vaš profa zahteva....

Sad ovo "integralimo", odnosno, dopišemo integrale na obe strane.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Da vas ne zbuni, ne mora u zadatku da bude dato *y'*, već može da ima *dx* i *dy* odmah.

To znači da bi diferencijalna jednačina izgledala:

$P(x)dx + Q(y)dy = 0$ **pa samo pretumbate da razdvojite promenljive....**

Evo nekoliko primera:

Primer 1. Reši diferencijalnu jednačinu: $yy` - x = 0$

Rešenje:

$$yy` - x = 0$$
$$yy` = x$$
$$y\frac{dy}{dx} = x \text{.......................} / \bullet dx, \text{ naravno uz uslov } dx \neq 0$$
$$ydy = xdx \qquad \text{sad integralimo}$$
$$\int ydy = \int xdx$$
$$\boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c}$$

Ovo rešenje se zove OPŠTE REŠENJE. E sad, neki profesori vole, da kada je to moguće odavde izrazimo *y*.

Za ovaj naš primer bi bilo:

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c..............\,/\cdot 2$$
$$y^2=x^2+2c$$
$$y=\pm\sqrt{x^2+2c}$$ ovde stavimo da je 2c = C, neka nova konstanta
$$\boxed{y=\pm\sqrt{x^2+C}}$$

Opet ponavljamo , vi pratite zahteve svog profesora....

Primer 2. Reši diferencijalnu jednačinu: $x+xy+y`(y+xy)=0$

Rešenje:

$$x+xy+y`(y+xy)=0$$
$$y`(y+xy)=-x-xy$$
$$\frac{dy}{dx}y(1+x)=-x(1+y).......................\,/\cdot dx \qquad (dx\neq 0)$$
$$y(1+x)dy=-x(1+y)dx......................\,/:(1+x)(1+y),\quad \text{naravno } 1+x\neq 0, 1+y\neq 0$$
$$\frac{y}{1+y}dy=-\frac{x}{1+x}dx................\text{integralimo}$$
$$\int\frac{y}{1+y}dy=\int\left(-\frac{x}{1+x}\right)dx$$

Vidimo da su integrali isti na obe strane, pa kad rešimo jedan , to je rešenje i drugog.

$$\int\left(\frac{x}{1+x}\right)dx=\int\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=x-\ln(x+1)$$

Sad se vratimo u diferencijalnu jednačinu:

$$y-\ln(y+1)=-\big(x-\ln(x+1)\big)+C$$
$$y-\ln(y+1)=-x+\ln(x+1)+C$$
$$y+x=\ln(y+1)+\ln(x+1)+C$$
$$\boxed{y+x=\ln(y+1)(x+1)+C}$$

Dobili smo **opšte rešenje**. U ovom primeru je nemoguće izraziti sve preko *y*, rešenje ostaje ovako.

Primer 3. Reši diferencijalnu jednačinu: $x(1+y^2) = y\,y`$

Rešenje:

$x(1+y^2) = y\,y`$

$x(1+y^2) = y\,\frac{dy}{dx}$ sve pomnožimo sa dx ($dx \neq 0$) i podelimo sa $1+y^2$

$x\,dx = \frac{ydy}{1+y^2}$ integralimo....

$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}$ integral na levoj strani je tablični a za ovaj na desnoj strani uzimamo smenu.

$$\frac{x^2}{2} = \int \frac{ydy}{1+y^2} = \begin{vmatrix} 1+y^2 = t \\ 2ydy = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c$$

Dakle:

$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c$ je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine.

Odavde možemo izraziti y, al se po našem uverenju dzabe mučimo....

Primer 4. Reši diferencijalnu jednačinu: $x^2 = 3y^2y`$

Rešenje:

$x^2 = 3y^2y`$

$x^2 = 3y^2\frac{dy}{dx}$ sve pomnožimo sa dx ($dx \neq 0$)

$x^2dx = 3y^2dy$ integralimo...

$\int x^2dx = \int 3y^2dy$ oba su tablična

$\frac{x^3}{3} = 3\frac{y^3}{3} + c$

$\frac{x^3}{3} = y^3 + c$ ovo je opšte rešenje

Primer 5. **Naći opšti i partikularni integral diferencijalne jednačine** $e^y(y`+1)=1$ **za početni uslov** $y(0)=\ln 2$

Rešenje:

Najpre rešimo d.j. i nadjemo opšte rešenje:

$$e^y(y`+1)=1$$
$$y`+1=\frac{1}{e^y}$$
$$y`=\frac{1}{e^y}-1$$
$$y`=\frac{1-e^y}{e^y}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-e^y}{e^y}$$
$$\frac{e^y}{1-e^y}dy=dx$$
$$\int\frac{e^y}{1-e^y}dy=\int dx$$
$$\int\frac{e^y}{1-e^y}dy=\begin{vmatrix}1-e^y=t\\ -e^y dy=dt\\ e^y dy=-dt\end{vmatrix}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|=-\ln\left|1-e^y\right|$$
$$-\ln\left|1-e^y\right|=x+c\rightarrow\boxed{\ln\left|1-e^y\right|=-x-c}$$

Šta znači naći partikularno rešenje?

U opšte rešenje zamenimo početne uslove i nadjemo vrednost za konstantu c.

Dobijenu vrednost za konstantu vratimo u opšte rešenje i dobijemo takozvano partikularno rešenje!

$y(0)=\ln 2$ znači da menjamo x = 0 i y = ln2

$$\ln\left|1-e^{\ln 2}\right|=0-c$$
$$\ln|1-2|=c$$
$$c=-\ln 1$$
$$\boxed{c=0}$$

Sad ovo zamenimo u opšte rešenje:

$\boxed{c=0}\rightarrow\ln\left|1-e^y\right|=-x-c\rightarrow\ln\left|1-e^y\right|=-x-0\rightarrow\boxed{\ln\left|1-e^y\right|=-x}$ partikularno rešenje!

Primer 6. Reši diferencijalnu jednačinu: $y`\sin x = y\ln y$

Rešenje:

$$y`\sin x = y\ln y$$
$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y$$
$$sixdy = y\ln ydx$$
$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$
$$\int\frac{dy}{y\ln y} = \int\frac{dx}{\sin x}$$

Sad ćemo svaki od ovih integrala rešiti "na stranu", pa rešenja udaciti u d.j.

$$\int\frac{dy}{y\ln y} = \left|\begin{matrix}\ln y = t\\ \frac{dy}{y} = dt\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln y|$$

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \boxed{\begin{matrix}tg\frac{x}{2} = t \to \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt\end{matrix}} = = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int\frac{1}{t}dt = \ln|t| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$$

Vratimo se u rešenje d.j. ali pazimo , ovde ima jedan mali "trik".

Dogovor je da kad su rešenja oba integrala sa *ln*, umesto konstante *c* pišemo *lnc.*

Ovo radimo da bi smo mogli da lepše spakujemo opšte rešenje:

$$\ln|\ln y| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln c$$
$$\ln|\ln y| = \ln\left(\left|tg\frac{x}{2}\right|\cdot c\right)$$
$$\boxed{\ln y = c\cdot tg\frac{x}{2}}$$

Podsetite se pravila za logaritmovanje iz II godine.