GEOMETRIJSKA VEROVATNOĆA

U slučaju kada se ishod nekog opita definiše slučajnim položajem tačke u nekoj oblasti, pri čemu je proizvoljni položaj tačke u toj oblasti jednako moguć , koristimo geometrijsku verovatnoću.

Ako, recimo, obeležimo da je "dimenzija" cele oblasti S, a S_p "dimenzija" dela te oblasti, čije se sve tačke smatraju povoljnom za ishod događaja, onda se verovatnoća izračunava: $\boxed{P=\frac{S_p}{S}}$.

Reč dimenzija smo namerno stavili pod navodnike jer S_p i S mogu predstavljati duži, površine, zapremine itd.

U zadacima sa geometrijskom verovatnoćom je gotovo neophodno nacrtati sliku, uočiti koja dužina, površina ili zapremina je nama " povoljna" . Pažljivo čitajte zadatak ...

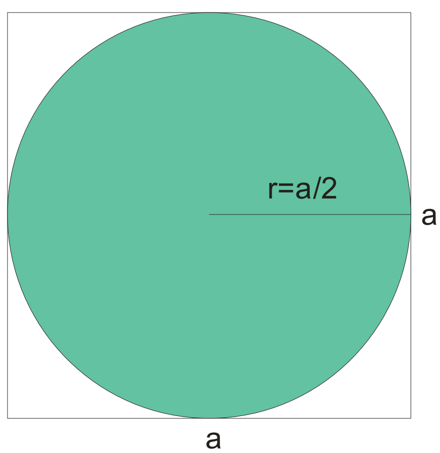
$\boxed{PRIMER\ \ 1.}$

U kvadratu je upisan krug. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka u kvadratu pripada i krugu.

Rešenje:

Definišimo događaj A: " slučajno izabrana tačka je u krugu"

Da skiciramo problem:



Ovde nam očigledno trebaju površine.

Površina kvadrata stranice a je $S=a^2$. Poluprečnik upisanog kruga je polovina stranice kvadrata, pa je povoljna površina $S_p=r^2\pi=\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{a^2\pi}{4}$

Odavde je $P(A)=\frac{S_p}{S}=\frac{\frac{a^2\pi}{4}}{a^2}=\frac{\cancel{a^2}\pi}{4\cancel{a^2}}=\frac{\pi}{4}\approx 0,785$

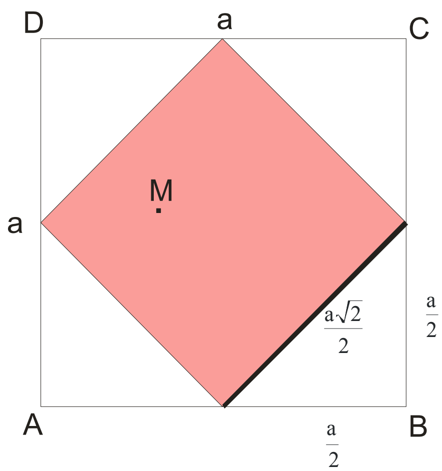
PRIMER 2.

Sredine stranica kvadrata , stranice a, spajanjem daju ponovo kvadrat. Tačka M je na slučajan način izabrana.

Odrediti verovatnoću da je izabrana tačka M iz drugog (manjeg) kvadrata.

Rešenje:

Definišimo događaj A: " slučajno izabrana tačka M je u manjem kvadratu"



Ako je stranica većeg kvadrata a , onda dužinu stranice manjeg kvadrata možemo izračunati primenom Pitagorine teoreme: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Jasno je da se opet radi o površinama. S_p je povoljna površina manjeg kvadrata, dok je celokupna površina S, površina većeg kvadrata:

$$P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\frac{a^2 \cdot 2}{4}}{a^2} = \frac{1}{2}$$

PRIMER 3.

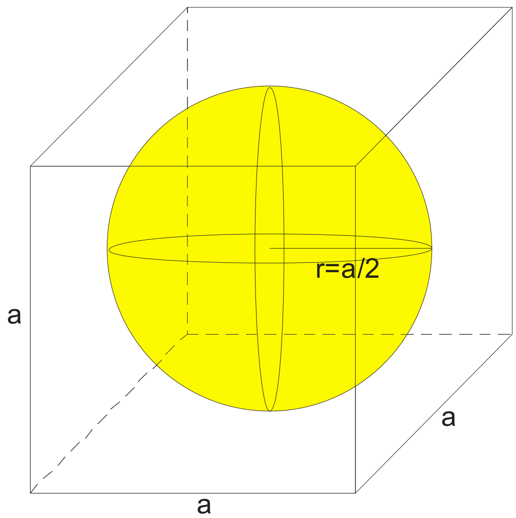
U datu kocku upisana je lopta. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka pripada i unutrašnjosti lopte.

Rešenje:

Događaj A: " slučajno izabrana tačka je u unutrašnjosti lopte"

U ovom primeru ćemo računati odnos zapremina.

Nacrtajmo sliku i nađimo vezu između poluprečnika i dužine stranice kocke.



S je zapremina kocke

S_p (povoljna zapremina) je zapremina lopte poluprečnika $\frac{a}{2}$, koja je upisana u kocku.

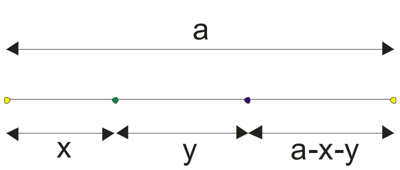
$$P(A)=\frac{S_p}{S}=\frac{V_L}{V_K}=\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3}=\frac{\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{\cancel{a^3}}{\cancel{8}}\pi}{\cancel{a^3}}=\frac{\pi}{6}\approx 0,52$$

$\boxed{PRIMER\ \ 4.}$

Duž dužine <u>a</u> podeljena je na tri dela. Odrediti verovatnoću da se od dobijenih delova može konstruisati trougao.

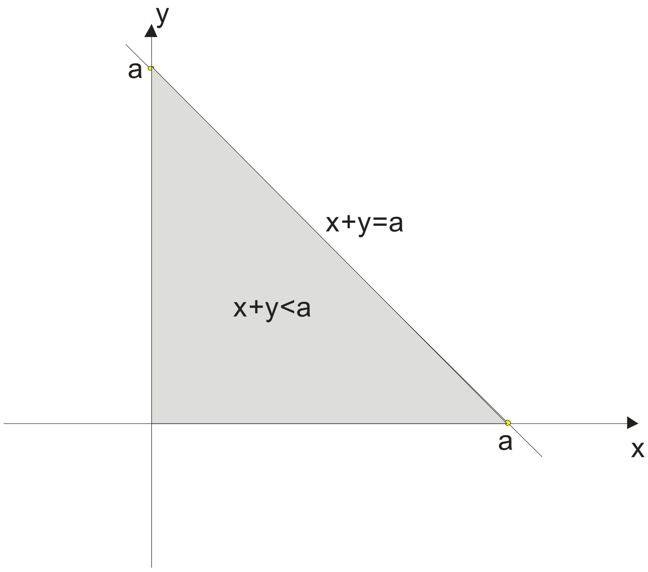
<u>Rešenje:</u>

Izdelimo najpre datu duž na proizvoljne delove: **x, y** , i **a-x-y.**



Oblast ***S*** u ravni čine sve tačke čije koordinate zadovoljavaju jednakost: $x+y<a$

Na slici bi to bilo:



Sad razmišljamo kako da dobijemo površinu S_p koja je nama povoljna.

Znamo da za stranice trougla mora da važi teorema da je zbir dve stranice trougla veći od treće stranice!

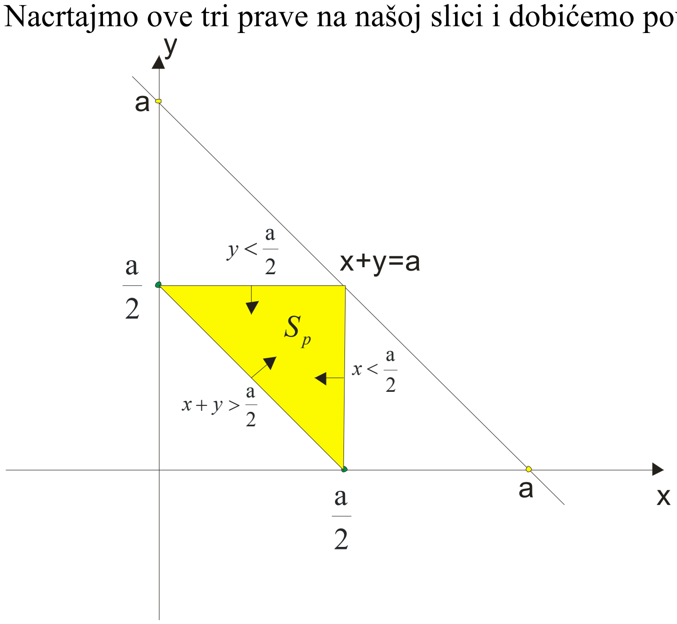
Stranice smo obeležili sa **x, y** , i **a-x-y,** pa je dakle**:**

x + y > a- x- y odavde je $\boxed{x + y > \frac{a}{2}}$

x + (a- x- y) > y odavde je $\boxed{y < \frac{a}{2}}$

y + (a- x- y) > x odavde je $\boxed{x < \frac{a}{2}}$

Nacrtajmo ove tri prave na našoj slici i dobićemo površinu koja nam je povoljna:



Sad možemo naći i traženu verovatnoću:

A: “ od dobijenih delova se može konstruisati trougao”

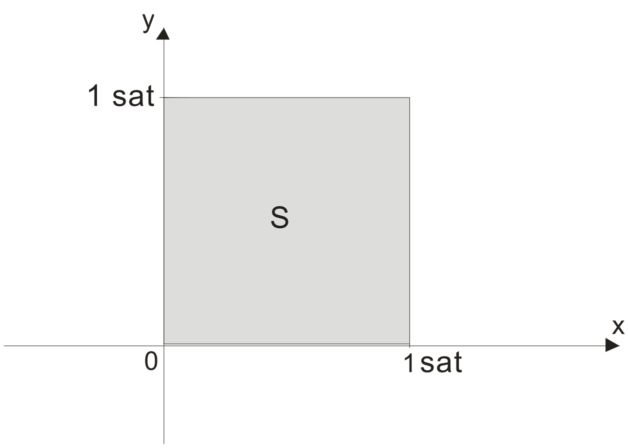
$$P(A)=\frac{S_p}{S}=\frac{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\cancel{2}}}{\frac{a^2}{\cancel{2}}}=\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2}=\frac{1}{4}=0,25$$

$\boxed{PRIMER\ \ 5.}$

Dve osobe zakazale su sastanak u toku jednog sata, na naznačenom mestu, uz obavezu čekanja 20 minuta ($\frac{1}{3}$ sata) . Odrediti verovatnoću susreta ako je dolazak svake od osoba jednako moguć u proizvoljnom momentu naznačenog vremena.

<u>Rešenje:</u>

Pošto su osobe zakazale susret u toku jednog sata, u ravni to možemo predstaviti kao površinu kvadrata stranice jedan.



$S=P_{kvadrata}=1^2=1$

Označimo ovako:

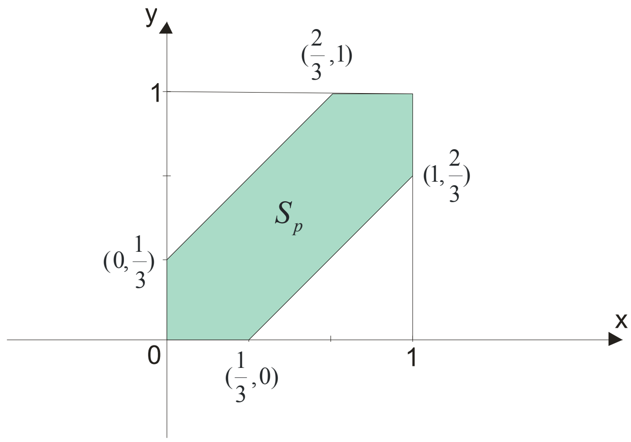
x - je trenutak dolaska prve osobe

y - je trenutak dolaska druge osobe

Kako je obaveza čekanja 20 min, to jest $\frac{1}{3}$ sata**, mora da važi:**

$x-y\leq\frac{1}{3}$ i $y-x\leq\frac{1}{3}$

Nacrtrajmo ove dve prave i da vidimo koje oblasti zadovoljavaju nejednačine:



Površinu S_p ćemo dobiti kad od površine kvadrata oduzmemo površine ova dva pravougla trouglića stranice $\frac{2}{3}$

$$S_p = P_{kvadrata} - 2 \cdot P_{trougla} = 1^2 - 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

A: " susret osoba u toku 1 sata sa obavezom čekanja 20 min"

$$P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9} \approx 0,56$$

$\boxed{PRIMER\ \ 6.}$

Dva broda moraju da stignu u jedno isto pristanište. Vreme dolaska obadva broda je nazavisno i jednako moguće u toku dana. Naći verovatnoću da će jedan od brodova morati čekati na oslobađanje pristaništa, ako je vreme zadržavanja prvog broda jedan, a drugog dva sata.

Rešenje:

Obeležimo sa :

x - vreme dolaska prvog broda

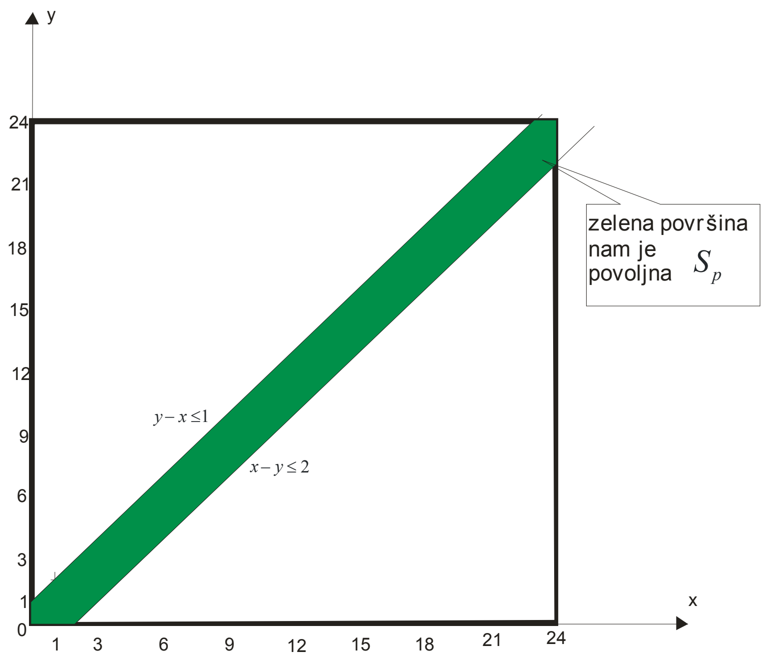
y - vreme dolaska drugog broda

Pošto u zadatku kaže da se radi o celom danu , to je $0 \le x \le 24$ i $0 \le y \le 24$, odnosno , površina S je površina kvadrata sa stranicama 24.

$$S = P_{kvadrata} = 24^2 = 576$$

Iz podatka da je vreme zadržavanja prvog broda jedan a drugog dva sata , dobijamo dve nejednačine:

$y - x \leq 1$ i $x - y \leq 2$. Nacrtajmo ove dve prave na slici i uočimo koje oblasti zadovoljavaju nejednačine:



Slično kao i u prethodnom zadatku, površinu S_p ćemo dobiti kad od površine kvadrata oduzmemo površine ova dva pravougla trougla, pa je: $P(A) = \dfrac{S_p}{S} \approx 0{,}121$ gde je **A: " brod čeka na oslobađanje pristaništa "**

$\boxed{PRIMER\ \ 7.}$

Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tetiva kružnice bude veća od stranice jednakostraničnog trougla koji je upisan u tu kružnicu. (BERTRANDOV PARADOKS)

<u>Rešenje:</u>

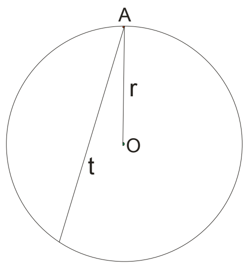
A: " nasumice izabrana tetiva je duža od stranice upisanog jednakostraničnog trougla"

Ovaj problem je zadao francuski matematičar Bertrand još davne 1889. godine i u matematici se po njemu i zove Bertrandov paradoks. Paradoks se sastoji u tome da se dobijaju **tri** različita rešenja zadatka, u zavisnosti od toga kako je povučena tetiva.

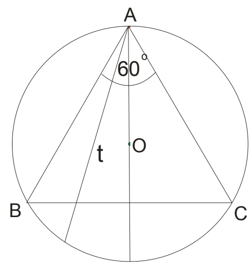
Posmatramo tri načina (nasumičnog) povlačenja tetive:

<u>I način</u> **(fiksirana je jedna krajnja tačka tetive)**

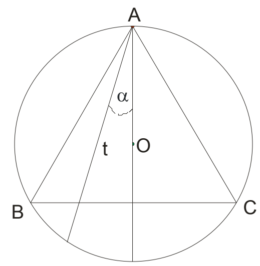
Na periferiji kruga proizvoljnog poluprečnika ***r*** uočimo tačku **A** i kroz nju povučemo tetivu u nasumice izabranom pravcu (slika 1) . Upišemo u dati krug jednakostranični trougao čije je jedno teme tačka A. Spojimo tačku A sa centrom kruga O (može i da produžimo da bude ceo prečnik), pogledajte sliku 2.



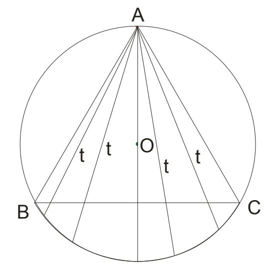
slika 1



slika 2



slika 3



slika 4

Označimo sa α ugao koji tetiva gradi sa poluprečnikom AO. (slika 3)

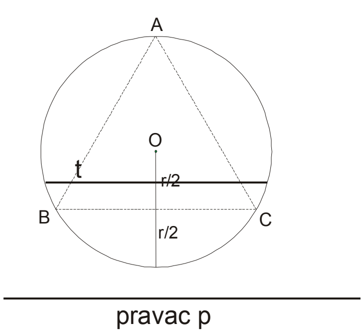
Sad razmišljamo: tetiva će biti duža od stranice trougla ako pravi uglove sa prečnikom do 30^0. A kako to možemo izvesti sa obe strane (slika 4) , zaključujemo da su nama povoljni uglovi do 60^0, to jest do $60^0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Ugao α može da uzima sve vrednosti do 180^0, to jest do π.

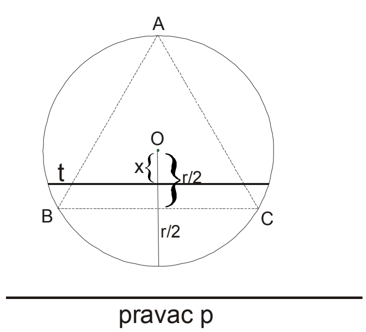
Tražena verovatnoća je : $P(A) = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \dfrac{1}{3}$

<u>II način</u> **(ako je fiksiran pravac tetive)**

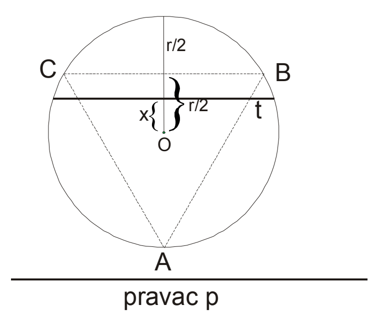
Fiksiramo jedan pravac i povučemo nasumice tetivu kruga paralelno fiksiranom pravcu. Upišemo u krug jednakostraničan trougao ali tako da je jedna njegova stranica paralelna sa izabranim pravcem (slika1.)



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Rastojanje stranice trougla od centra datog kruga je očigledno $\dfrac{r}{2}$. Obeležimo rastojanje tetive do centra sa x(slika 2.)

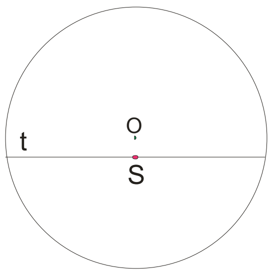
Sad razmišljamo: da bi tetiva bila duža od stranice trougla , njeno rastojanje mora biti kraće od $\dfrac{r}{2}$.

Istu situaciju imamo i ako okrenemo trougao (slika 3.), što nam govori da rastojanje x ide od 0 do r.

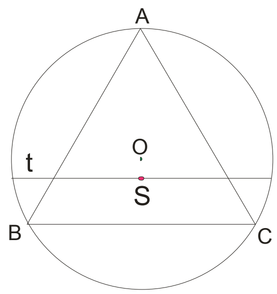
Tražena verovatnoća je u ovom slučaju $P(A)=\dfrac{\frac{r}{2}}{r}=\dfrac{1}{2}$

<u>III način</u> (znamo položaj središta tetive)

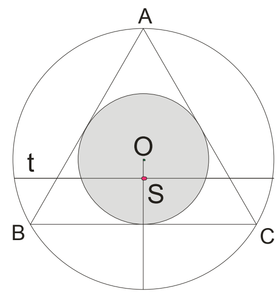
Izaberemo u krugu jednu tačku i kroz nju povučemo tetivu koja će biti prepolovljena tom tačkom(slika 1.)



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Upišemo jednakostraničan trougao da stranica bude paralelna sa tetivom(slika 2.)

Sad razmišljamo: tetiva će imati veću dužinu od stranice jednakostraničnog trougla ako i samo ako njeno središte leži unutar kruga koji je upisan u taj jednakostranični trougao! (slika 3.)

Poluprečnik ovako upisanog kruga (sivog) je $\dfrac{r}{2}$ a površina $\left(\dfrac{r}{2}\right)^2\pi=\dfrac{r^2\pi}{4}$

Tražena verovatnoća je u ovom slučaju $P(A)=\dfrac{\frac{r^2\pi}{4}}{r^2\pi}=\dfrac{1}{4}$

Kao što vidimo, u sva tri slučaja smo dobili različite verovatnoće, što predstavlja paradoks.

Objašnjenje za ovaj paradoks leži u činjenici da zadatak (problem) nije precizno formulisan !

Ovde se ustvari radi o tri različita zadatka, u zavisnosti od toga šta podrazumevamo pod pojmom proizvoljne tetive.

Zato mi stalno ponavljamo da zadatke iz verovatnoće treba pažljivo čitati i polako proučavati uz odgovarajuću skicu problema…