INTEGRALI ZADACI (IV DEO) – Integracija racionalne funkcije

Racionalna funkcija je oblika $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Može biti **prava i neprava**.

Prava racionalna funkcija je ona kod koje je maksimalni stepen polinoma P(x) manji od maksimalnog stepena polinoma Q(x). (na primer : $\frac{x}{x^2-3}, \frac{x^2-3x+12}{x^3+5x^2-2x+1}, \frac{4}{x^5+5x^2-22x+31}$ itd.)

Neprava racionalna funkcija je ona kod koje je max stepen P(x) veći ili jednak sa max stepenom Q(x).

(na primer : $\frac{x^2+2x-7}{x^2-13}, \frac{x^2-3x+12}{2x+1}, \frac{x^4+75x^2-14}{x+3}$ itd.) . U slučaju da je zadata neprava racionalna funkcija **moramo** podeliti ta dva polinoma , dobiti rešenje plus prava racionalna funkcija.

Integraciju prave racionalne funkcije vršimo tako što :

Imenilac rastavimo na činioce upotrebom:

- izvlačimo zajednički ispred zagrade
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ ako nam je data kvadratna jednačina
- $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ ili $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ razlika, odnosno zbir kubova
- Koristimo Bezuovu teoremu ili sklapamo " dva po dva" ako je dat polinom većeg stepena

Dalje datu pravu racionalnu funkciju rastavljamo na sledeći način:(primeri)

$\frac{P(x)}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$ ako su u imeniocu svi linearni bez stepena , svaki ide sa po jednim slovom: A,B,C…

$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x+7)}$ ako u imeniocu imamo linearne članove , ali sa stepenom, rastavljamo dok ne dođemo do najvećeg stepena.

$\frac{P(x)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ ako u imeniocu imamo nerazloživ polinom , za njega moramo da uzmemo izraz tipa *Bx+C* (pazi na ovo)

$\frac{P(x)}{(x-7)\cdot(x^2+5)^2\cdot x^3} = \frac{A}{x-7} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+5)^2} + \frac{F}{x} + \frac{G}{x^2} + \frac{H}{x^3}$ evo primera gde i nerazloživ činilac u imeniocu koji je na kvadrat moramo dva puta da uzimamo u razlaganju.

PRIMERI

$\boxed{1.}$ $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = ?$

Ovde se radi o pravoj racionalnoj funkciji, pa odmah krećemo sa razlaganjem. Najpre imenilac rastavimo na činioce!

$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

Dakle, naš integral je $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}dx = ?$

Izvučemo racionalnu funkciju:

$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$ sve pomnožimo sa $x(x-1)(x+1)$

$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

$x-3 = A(x^2-1) + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx$

$x-3 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx$ "sklopimo" uz x^2, pa one uz x, pa slobodne članove...

$x-3 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A$ sad vršimo upoređivanje: članovi uz x^2, pa uz x, pa bez x

$A+B+C=0 \rightarrow$ Na levoj strani nemamo član x^2 ili možemo dodati da je to $0 \cdot x^2$

$B-C=1 \rightarrow$ Na levoj strani imamo x, to jest $1 \cdot x$, a na desnoj $x(B-C)$

$-A=-3 \rightarrow$ Ovo su oni bez x-seva

Rešavamo ovaj sistem jednačina:

$$\begin{aligned} &A+B+C=0 \\ &B-C=1 \\ &\underline{-A=-3} \end{aligned}$$

$\boxed{A=3} \rightarrow A+B+C=0 \rightarrow 3+B+C=0 \rightarrow B+C=-3$

$\boxed{\begin{aligned} B-C&=1 \\ B+C&=-3 \end{aligned}} \rightarrow 2B=-2 \rightarrow \boxed{B=-1} \rightarrow \boxed{C=-2}$

Vratimo rešenja:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

E sad se vratimo da rešimo dati integral, jer smo ga rastavili na tri mala integrala koji su najčešće ili tablični ili se rešavaju smenom.

$$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{2}{x+1}dx$$
$$= \boxed{3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C}$$

Možda će vaš profesor da traži da " spakujete" rešenje upotrebom pravila za logaritme. Da se podsetimo:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$
4. $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
5. $\ln x^n = n\ln x$
6. $e^{\ln x} = x$

Naše rešenje će biti:

$$3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C = \ln|x|^3 - (\ln|x-1| + \ln|x+1|^2) + C = \ln|x|^3 - \ln|x-1|\cdot|x+1|^2 + C =$$
$$= \boxed{\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right| + C}$$

$\boxed{2.}$ $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx = ?$

Opet se radi o pravoj racionalnoj funkciji. Izvlačimo je i rastavljamo:

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)}$$

$\frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$ sve pomnožimo sa $x^2(x-2)$

$x+2 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$

$x+2 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2$

$1\cdot x + 2 = x^2(A+C) + x(-2A+B) - 2B$ sad vršimo upoređivanje

$A + C = 0$

$-2A + B = 1$

$\underline{-2B = 2}$

Rešavamo ovaj sistem jednačina, iz treće jednačine odmah dobijamo vrednost za B

$\boxed{B=-1} \to -2A + B = 1 \to -2A - 1 = 1 \to \boxed{A=-1} \to \boxed{C=1}$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-2}$$

$$\int\frac{x+2}{x^2(x-2)}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{-1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x-2}dx=-\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-2}dx+\int\frac{1}{x-2}dx=-\ln|x|-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\ln|x-2|+C$$

Malo prisredimo rešenje:

$$\ln|x-2|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C=\boxed{\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+\frac{1}{x}+C}$$

$\boxed{3.}$ $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}dx=?$

Ovo je neprava racionalna funkcija (stepen u brojiocu je veći od stepena imenioca), pa moramo podeliti ova dva polinoma (podsetite se deljenja , fajl polinomi iz I godine).

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=$$

$$(\cancel{x^3}+x^2-16x+16):(x^2-4x+3)=x+5$$

$$\underline{\cancel{\pm x^3}\mp 4x^2\pm 3x}$$

$$\cancel{\pm 5x^2}-19x+16$$

$$\underline{\cancel{\pm 5x^2}\mp 20x\pm 15}$$

$$\boxed{x+1}\rightarrow ostatak$$

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=x+5+\frac{x+1}{x^2-4x+3}$$

Dobili smo pravu racionalnu funkciju koju dalje rastavljamo:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=$$

$$x^2-4x+3=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \rightarrow x_1=3, x_2=1$$

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

$$x+1=A(x-3)+B(x-1)$$

$$x+1=Ax-3A+Bx-B$$

$$x+1=x(A+B)-3A-B$$

$$A+B=1$$

$$\underline{-3A-B=1}$$

$$-2A=2 \rightarrow \boxed{A=-1} \rightarrow \boxed{B=2}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3}$$

Rešimo sada i ceo integral:

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=x+5+\frac{x+1}{x^2-4x+3}=x+5+\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3}$$

$$\int\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}dx=\int(x+5+\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3})dx=\frac{x^2}{2}+5x-\ln|x-1|+2\ln|x-3|+C$$

$$=\boxed{\frac{x^2}{2}+5x+\ln\frac{(x-3)^2}{|x-1|}+C}$$

$\boxed{4.}$ $\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}=?$

Prava racionalna funkcija, izdvojimo je:

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=$$

Najpre da funkciju u imeniocu rastavimo na činioce...

$x^3-3x+2=0$ ideja je da sklapamo "2 po 2" zato rastavimo $-3x=-x-2x$

$$x^3-x-2x+2=0$$

$$x(x^2-1)-2(x-1)=0$$

$$x\boxed{(x-1)}(x+1)-2\boxed{(x-1)}=0$$

$$(x-1)[x(x+1)-2]=0$$

$$(x-1)(x^2+x-2)=0 \rightarrow x-1=0 \vee x^2+x-2=0 \rightarrow x_1=1, x_2=1, x_3=-2$$

$$x^3-3x+2=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$$

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\text{......................................}/\bullet(x-1)^2(x+2)$$

$$x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

$$x=A(x^2+x-2)+Bx+2B+C(x^2-2x+1)$$

$$x=Ax^2+Ax-2A+Bx+2B+Cx^2-2Cx+C$$

$$\underline{1\cdot x=x^2(A+C)+x(A+B-2C)-2A+2B+C}\qquad\text{sad uporedjujemo}$$

$$A+C=0$$

$$A+B-2C=1$$

$$\underline{-2A+2B+C=0}$$

$$C=-A$$

$$A+B+2A=1$$

$$\underline{-2A+2B-A=0}$$

$$3A+B=1$$

$$\underline{-3A+2B=0}$$

$$3B=1\rightarrow\boxed{B=\frac{1}{3}}\rightarrow 3A=\frac{2}{3}\rightarrow\boxed{A=\frac{2}{9}}\rightarrow\boxed{C=-\frac{2}{9}}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{2}{9}}{x+2}$$

Još da rešimo integral:

$$\int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int\frac{\frac{2}{9}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}dx+\int\frac{-\frac{2}{9}}{x+2}dx=$$

$$=\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{3}\int(x-1)^{-2}dx-\frac{2}{9}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\boxed{\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C}$$

$\boxed{5.}$ $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3-x^2+x-1}=?$

Postupak je dakle isti: kako se radi o pravoj racionalnoj funkciji , nju izdvajamo i rastavljamo na sabirke.

U imeniocu imamo polinom trećeg stepena koji moramo rastaviti na činioce. Upotrebićemo sklapanje ‘2 po 2’,

A možemo koristiti i Bezuovu teoremu.

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=$$

Da sredimo imenilac prvo...

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+1(x-1)=(x-1)(x^2+1)$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\rightarrow pazi\ \ x^2+1 \text{ je nerazloživ u } R$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\text{..........................}/\bullet(x-1)(x^2+1)$$

$$x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$x=Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$$\underline{x=x^2(A+B)+x(-B+C)+A-C}$$

$$A+B=0$$

$$-B+C=1$$

$$\underline{A-C=0}\rightarrow A=C$$

$$A+B=0$$

$$\underline{A-B=1}$$

$$2A=1\rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}\rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}\rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+1})$$

Vratimo se da rešimo zadati integral:

$$\int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+1})dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx\right)$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+arctgx\right)+C}$$

$\boxed{6.}$ $\quad\int\frac{4}{x^4+1}dx=?$

Ovo je već malo ozbiljniji zadatak!

$$\frac{4}{x^4+1}=$$

Ovde je problem: Kako rastaviti imenilac na činioce?

Trik je da dodamo i oduzmemo $2x^2$, da napunimo pun kvadrat pa iskoristimo formulu za razliku kvadrata!

$$x^4+1=\underline{x^4+2x^2+1}-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+1-\sqrt{2}x)\cdot(x^2+1+\sqrt{2}x)$$

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

$$\frac{4}{x^4+1}=\frac{4}{(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$\frac{4}{(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}\text{.......................}/\bullet(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

$$4=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$4=Ax^3+A\sqrt{2}x^2+Ax+Bx^2+B\sqrt{2}x+B+Cx^3-C\sqrt{2}x^2+Cx+Dx^2-D\sqrt{2}x+D$$

$$4=x^3(A+C)+x^2(A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D)+x(A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})+B+D$$

Uporedjujemo:

$$A+C=0$$

$$A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0$$

$$A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0\to \underline{|A+C=0\to B\sqrt{2}-D\sqrt{2}=0\to\sqrt{2}(B-D)=0\to B-D=0}$$

$$\underline{B+D=4}$$

$$B-D=0$$

$$\underline{B+D=4}$$

$$\boxed{B=2}\wedge\boxed{D=2}$$

$$A+C=0$$

$$\underline{\sqrt{2}(A-C)=-4}$$

$$\boxed{A=-\sqrt{2}}\wedge\boxed{C=\sqrt{2}}$$

Zamenimo:

$$\frac{4}{(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$\frac{4}{(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Imamo dakle da rešimo:

$$\int\frac{4}{(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)}dx=\int\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx$$

Ovo su integrali tipa $I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ koji se rešavaju preko $I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ i formule:

$I_2 = \frac{A}{2a} \ln\left|ax^2+bx+c\right| + (B - \frac{Ab}{2a})\, I_1 + C$

Postupak rešavanja je objašnjen u jednom od fajlova integrali - zadaci .

Evo konačnog rešenja a vi ga proverite .

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\cdot arctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C}$$

$\boxed{7.}$ Kad smo u prvom fajlu integrali zadaci (I deo) davali tablicu integrala pomenuli smo i integral

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ kao tablični. Da vidimo kako smo došli do rešenja istog.

On se radi kao racionalna funkcija:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}$$
$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\text{.....................................}/\bullet(x-a)(x+a)$$
$$1=A(x+a)+B(x-a)$$
$$1=Ax+Aa+Bx-Ba$$
$$1=x(A+B)+Aa-Ba$$
$$Uporedjujemo:$$
$$A+B=0$$
$$\underline{a(A-B)=1}$$
$$A+B=0$$
$$\underline{A-B=\frac{1}{a}}$$
$$2A=\frac{1}{a}\to\boxed{A=\frac{1}{2a}}\wedge\boxed{B=-\frac{1}{2a}}$$
$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$$
$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}+\frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}$$