INTEGRALI ZADACI (II DEO) – INTEGRACIJA POMOĆU SMENE

Ako uvedemo smenu $x = g(t)$ onda je $dx = g`(t)dt$ i početni integral $\int f(x)dx$ postaje:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g`(t)dt}$$

Za početak evo jednog saveta: **za smenu birati izraz čiji je izvod uz dx.**

Smena ustvari, prosto rečeno, znači da u datom integralu nešto (recimo Ω)izaberemo da je *t*. Od toga nadjemo izvod i to zamenimo u početni integral, koji je sada sve " *po t* ". $\begin{vmatrix} \Omega = t \\ \Omega`dx = dt \end{vmatrix}$.

Primeri:

$\boxed{1}$

$$\int \frac{2xdx}{x^2+12} = ?$$

Vidimo da uz *dx* imamo izraz *2x*. Razmišljamo od čega je izvod *2x* ? Znamo da je $(x^2)` = 2x$ i to ćemo izabrati kao smenu. Još je pametnije da uzmemo ceo izraz $x^2+12$ da nam bude smena jer je izvod od konstante 0. [ $(x^2+12)` = 2x$]

$$\int \frac{2xdx}{x^2+12} = \begin{vmatrix} x^2+12 = t \\ 2xdx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \text{kad rešimo integral 'po t'},$$

onda vratimo smenu i dobijamo rešenje 'po x' = $\boxed{\ln|x^2+12| + C}$

$\boxed{2}$

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = ?$$

I ovde slično razmišljamo, izvod od x^3+1 je $3x^2$ i to je pogodno za smenu, al šta ćemo sa onom trojkom?

Ne brinite, znamo da konstanta uvek može da ide ispred integrala po pravilu $\boxed{\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx}$

koje smo objasnili u prethodnom delu (integrali zadaci I deo).

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \begin{vmatrix} x^3+1 = t \\ 3x^2dx = dt \to x^2dx = \dfrac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \boxed{\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C}$$

$\boxed{3}$

$$\int \frac{1}{x+5}dx = ?$$

Ovaj integral liči na tablični $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ ali umesto x u imeniocu imamo $x + 5$. Zato je pametno baš taj izraz uzeti za smenu :

$$\int \frac{1}{x+5}dx = \left| \begin{matrix} x+5=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \boxed{\ln|x+5| + C}$$

Vezano za ovakve integrale možemo izvesti jedan zaključak: $\boxed{\int \frac{1}{x \pm a}dx = \ln|x \pm a| + C}$

$\boxed{4}$

$$\int \frac{1}{(x+5)^3}dx = ?$$

Ovaj integral je sličan prethodnom, ali pazite jer u imeniocu je stepen izraza pa on **'ne ide'** u ln.

$$\int \frac{1}{(x+5)^3}dx = \left| \begin{matrix} x+5=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^3}dt = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2\cdot t^2} + C = -\frac{1}{2\cdot(x+5)^2} + C$$

$\boxed{5}$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = ?$$

Uz dx imamo cosx, a kako znamo da je izvod od (sinx)`=cosx , jasno je da će to i biti smena.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \boxed{\frac{\sin^3 x}{3} + C}$$

$\boxed{6}$

$$\int e^{-x^3} x^2 dx = ?$$

$$\int e^{-x^3} x^2 dx = \left| \begin{matrix} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \to x^2 dx = \frac{dt}{-3} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + C = \boxed{-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C}$$

$\boxed{7}$

$$\int ctgxdx = ?$$

Ovde najpre moramo upotrebiti identitet $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, pa tek onda uzeti smenu:

$$\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos xdx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$$

$\boxed{8}$

$$\int \frac{arctgy}{1+y^2}dy = ?$$

Vidite i sami da se bez znanja izvoda teško može razumeti metoda smene, zato vam savetujemo da prvo njih dobro obnovite pa tek onda da se probate sa integralima…(**fajlovi izvodi – zadaci I,II III deo**)

$$\int \frac{arctgy}{1+y^2}dy = \begin{vmatrix} arctgy = t \\ \dfrac{1}{1+y^2}dy = dt \end{vmatrix} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \boxed{\frac{(arctgy)^2}{2} + C}$$

$\boxed{9}$

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+4} = ?$$

Ovde uz dx imamo x^2 I znamo da je izvod od $(x^3)` = 3x^2$ a u imeniocu nemamo x^3. Zato ćemo mi malo prepraviti imenilac da bi dobili x^3…

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+4} = \int \frac{x^2dx}{(x^3)^2+4} = \begin{vmatrix} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \rightarrow x^2dx = \dfrac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+4}$$

Ovde ćemo upotrebiti tablični integral $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+t^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C$ ali moramo najpre odrediti *a*.

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \boxed{\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2} + C}$$

Kad smo već upotrebili ovaj tablični integral , ako se sećate, mi smo pomenuli da ne dozvoljavaju svi profesori da se on koristi. Pa da vidimo kako smo mi njega rešili metodom smene:

$\boxed{10}$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C \quad \textit{TABLIČNI}$$

Dokaz:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2[1+(\frac{x}{a})^2]}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{[1+(\frac{x}{a})^2]}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{a}=t \\ \frac{dx}{a}=dt \rightarrow dx = adt \end{array} \right| = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{[1+t^2]}adt = \frac{1}{a^{\cancel{2}}}\cancel{a}\int \frac{1}{[1+t^2]}dt =$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{[1+t^2]}dt = \frac{1}{a}arctgt + C = \boxed{\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C}$$

$\boxed{11}$

$$\int \frac{1}{25+x^2}dx = ?$$

Ovde je dakle samo problem odrediti vrednost za ***a.***

$$\int \frac{1}{25+x^2}dx = \int \frac{1}{5^2+x^2}dx = [\text{ovde je dakle } a\text{=5}] = \boxed{\frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}+C}$$

Slična situacija je i sa :

$\boxed{12}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C \quad \textit{TABLIČNI}$$

Dokaz:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2[1-(\frac{x}{a})^2]}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{[1-(\frac{x}{a})^2]}}dx = \int \frac{1}{a\cdot\sqrt{[1-(\frac{x}{a})^2]}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx$$

$$= \left| \begin{array}{c} \frac{x}{a}=t \\ \frac{dx}{a}=dt \rightarrow dx = adt \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt = \frac{1}{\cancel{a}}\cdot\cancel{a}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + C = \boxed{\arcsin\frac{x}{a}+C}$$

$\boxed{13}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{15-x^2}}dx = ?$$

Opet se traži vrednost za *a*. Ovde je malo teže jer 15 nije kvadrat nekog broja, ali mi upotrebimo trikče:

$$\int \frac{1}{\sqrt{15-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{15})^2-x^2}}dx = [\text{dakle } a=\sqrt{15} \text{ pa je}] = \boxed{\arcsin\frac{x}{\sqrt{15}}+C}$$

$\boxed{14}$

$\int \sin axdx = ?$ gde je a konstanta, to jest bilo koji broj.

$$\int \sin axdx = \left| \begin{array}{l} ax = t \\ adx = dt \to dx = \dfrac{dt}{a} \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int \sin tdt = \frac{1}{a}(-\cos t)+C = \boxed{-\frac{1}{a}\cos ax + C}$$

Vezano za ovakve integrale , gde umesto x-sa imamo ax , možemo reći da se rade uvek sa smenom $ax=t$, odnosno radimo ga kao tablični, a ispred integrala dodamo konstantu $\frac{1}{a}$.

Na primer:

$$\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}+C \qquad \text{itd.}$$

$\boxed{15}$

$$\int \sin^2 xdx = ?$$

Ovde nam treba trigonometrijska formulica za $\sin^2 x$ (pogledaj prethodni fajl : **integrali zadaci I deo**)

$$\int \sin^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}[\int 1\cdot dx - \int \cos 2xdx] = \frac{1}{2}[x-\frac{1}{2}\sin 2x]+C = \boxed{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

Ovde smo u radu iskoristili zaključak iz prethodnog zadatka $\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$\boxed{16}$

$$\int \cos^2 x dx = ?$$

Opet mora trigonometrija… $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int [1+\cos 2x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}[\int 1 \cdot dx + \int \cos 2x dx] = \frac{1}{2}[x + \frac{1}{2}\sin 2x] + C = \boxed{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

$\boxed{17}$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = ?$$

Ovaj zadatak možemo rešiti na više načina. Upotrebićemo trikče :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$$

Sada već imamo očiglednu smenu...

$$\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

Ovo je tablični integral $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ pa je

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C$$

Rešenje može ostati i ovakvo, ali ćemo ga mi namerno malo prepraviti jer se ovaj integral može elegantnije rešiti preko trigonometrijskih smena, a tamo će rešenje izgledati baš kao...

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|^{\frac{1}{2}} + C = \ln\left|\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}\right| + C = \boxed{\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C}$$

$\boxed{18}$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = ?$$

$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}dx =$ ovde je trik izvršiti racionalizaciju $= \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

Sad ćemo ovaj integral rastaviti na dva...

$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ prvi je tablični a drugi ćemo rešiti smenom(na stranu)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = t \\ \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)dx = dt \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -dt \end{array} \right| = \int (-dt) = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Vratimo se u dosadašnje rešenje i imamo:

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x - (-\sqrt{1-x^2}) + C = \boxed{\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$