ASIMPTOTE FUNKCIJE

(PONAŠANJE FUNKCIJE NA KRAJEVIMA OBLASTI DEFINISANOSTI)

Ovo je jedna od najznačajnijih tačaka u ispitivanju toka funkcije.

Neki profesori zahtevaju da se asimptote rade kao 2. tačka u ispitivanju odmah nakon **Domena,** dok neki profesori asimptote rade tek na kraju. Naš savet, kao i uvek je , da vi radite kao što vaš profesor zahteva.....

Da bi razumeli ovu tačku neophodno je da steknete "napredni nivo" znanja iz dela **granične vrednosti funkcija**, da poznajete dobro **izvode i Lopitalovu teoremu.**

Neki profesori ovu tačku zovu i **PONAŠANJE FUNKCIJE NA KRAJEVIMA OBLASTI DEFINISANOSTI** a po nama to je možda i bolje reći nego li samo asimptote.

Najpre moramo ispitati oblast definisanosti funkcije (domen) pa onda tek krećemo na asimptote.

Šta konkretno radimo?

Tražimo tri vrste asimptota: vertikalnu , horizontalnu i kosu.

- **vertikalna**

Potencijalna vertikalna asimptota se nalazi u prekidima iz oblasti definisanosti. Ako je recimo tačka x = Θ prekid, moramo ispitati kako se funkcija " ponaša " u nekoj okolini te tačke, pa tražimo dva limesa:

$\lim\limits_{\substack{x\to\Theta+\varepsilon,\\ kad\ \varepsilon\to 0}} f(x)$ i $\lim\limits_{\substack{x\to\Theta-\varepsilon,\\ kad\ \varepsilon\to 0}} f(x)$ Ako su rešenja ova dva limesa $+\infty$ ili - ∞ onda je prava x = Θ vertikalna asimptota, a ako dobijemo neki broj za rešenje, onda funkcija teži tom broju (po ipsilonu)

Pazite: Za svaki prekid mora da se traže oba limesa, osim možda ako funkcija nije negde definisana.

- **horizontalna**

Ovde tražimo dva limesa: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ako kao rešenje dobijemo neki broj , recimo #, onda je y = # horizontalna asimptota, a ako dobijemo $+\infty$ ili - ∞ onda kažemo da nema horizontalna asimptota.

- **kosa**

Kosa asimptota je prava **y = kx + n**

k= $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i n= $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$

Naravno, potrebno je raditi ove limese i za $+\infty$ i za - ∞, naročito kod složenijih funkcija,jer se može desiti da nema ove asimptote sa obe strane...

1. Odrediti asimptote funkcija:

a) $y = \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$

b) $y = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

Rešenje:

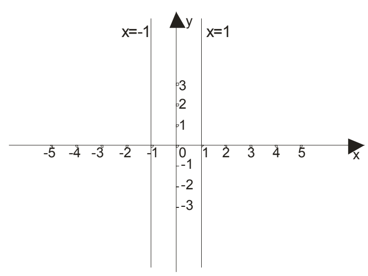
a) $y = \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$

Oblast definisanosti (domen)

Funkcija je definisana za $1-x^2 \neq 0$ to jest $(1-x)(1+x) \neq 0$ odnosno $x \neq 1$ i $x \neq -1$

Dakle $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

Ovo nam govori da funkcija ima prekide u x=-1 i x=1 (tu su nam asimptote)



Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna asimptota

$$\lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon,\\ kad\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon,\\ kad\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)} = \frac{1^2-4}{(1-(1+\varepsilon))(1+1+\varepsilon)} = \frac{-3}{(1-1-\varepsilon)2} = \frac{-3}{(-\varepsilon)2} = +\infty \quad \text{crvena crta}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)} = \frac{1^2-4}{(1-(1-\varepsilon))(1+1-\varepsilon)} = \frac{-3}{(1-1+\varepsilon)2} = \frac{-3}{\varepsilon\cdot 2} = -\infty \quad \text{zelena crta}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \lim_{\substack{x\to -1+\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)} = \frac{(-1)^2-4}{(1-(-1+\varepsilon))(1+(-1+\varepsilon))} = \frac{-3}{(2-\varepsilon)\varepsilon} = \frac{-3}{2\varepsilon} = -\infty \quad \text{crna crta}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1-\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \lim_{\substack{x\to -1-\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{x^2-4}{(1-x)(1+x)} = \frac{(-1)^2-4}{(1-(-1-\varepsilon))(1+(-1-\varepsilon))} = \frac{-3}{(2+\varepsilon)(-\varepsilon)} = \frac{-3}{2(-\varepsilon)} = +\infty$$ plava crta

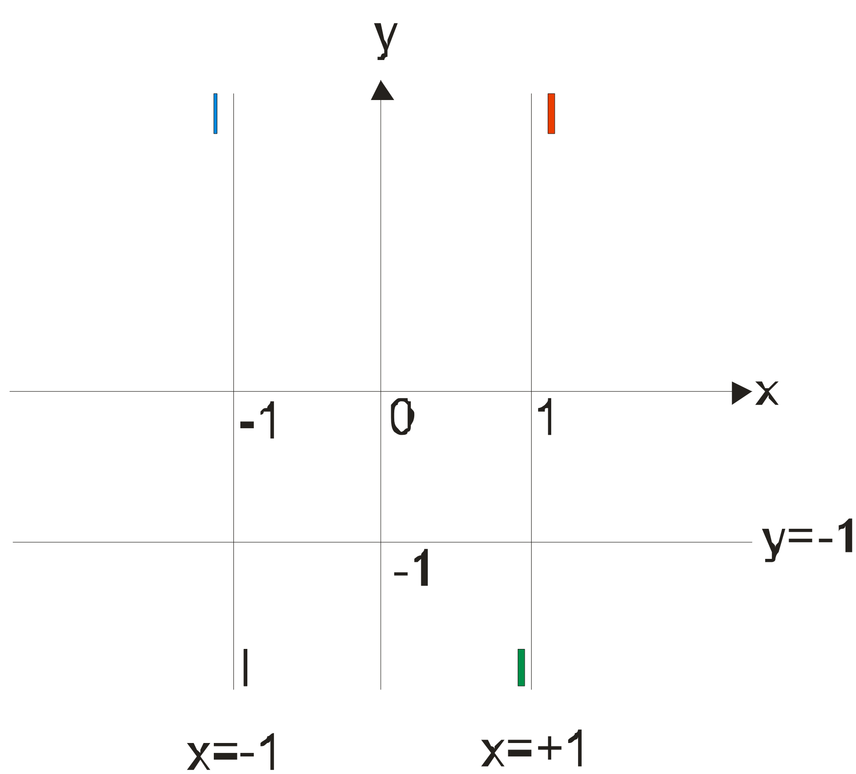
<u>Horizontalna asimptota</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-\boxed{\frac{4}{x^2}})}{\cancel{x^2}(\boxed{\frac{1}{x^2}}-1)} = -\frac{1}{1} = -1$$ pa je y = - 1 horizontalna asimptota

(ovo uokvireno teži nuli kad x teži plus ili minus beskonačno)

Znači da , pošto ima horizontalna asimptota, kose asimptote nema.

Pogledajmo šta će ovo što smo ispitali konkretno značiti na grafiku:



b) $y=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$

Oblast definisanosti (domen)

$$x-2\neq 0\rightarrow x\neq 2\rightarrow D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$$

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna asimptota

$$\lim_{\substack{x\to 2+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{2^2-5\cdot 2+7}{2+\varepsilon-2}=\frac{1}{+0}=+\infty \text{ crvena crtka}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{2^2-5\cdot 2+7}{2-\varepsilon-2}=\frac{1}{-0}=-\infty \text{ plava crtka}$$

Horizontalna asimptota

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{\cancel{2}}(1-\boxed{\frac{5}{x}}+\boxed{\frac{7}{x^2}})}{\cancel{x}(1-\boxed{\frac{2}{x}})}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty \text{ nema horizontalna asimptota}$$

Kosa asimptota je prava **y = kx + n**

k= $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ i n= $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+7}{x^2-2x}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}(1-\boxed{\frac{5}{x}}+\boxed{\frac{7}{x^2}})}{\cancel{x^2}(1-\boxed{\frac{2}{x^2}})}=\frac{1}{1}=1\rightarrow\boxed{k=1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2-5x+7}{x-2}-x]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2-5x+7-x(x-2)}{x-2}]=$$

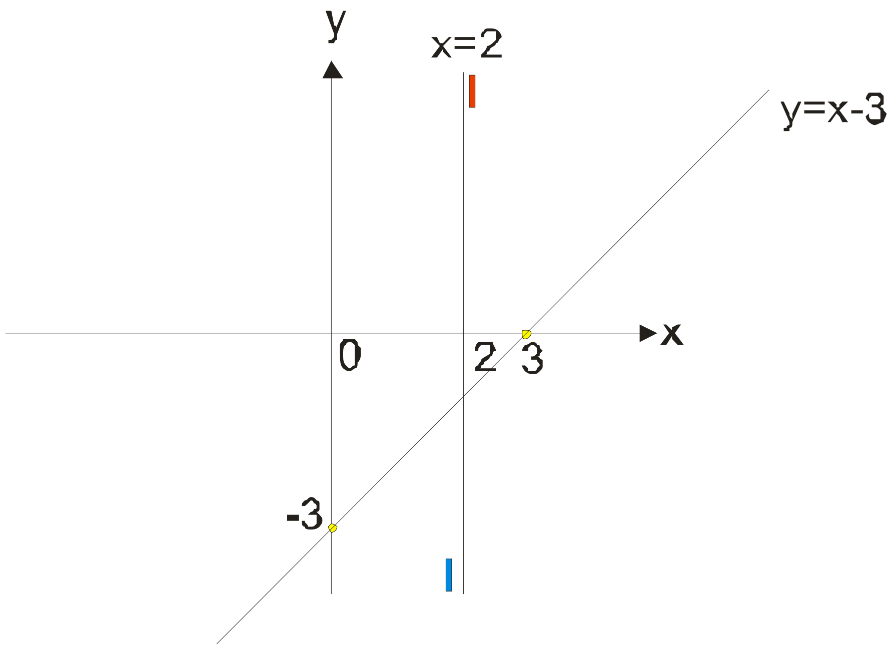
$$=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{\cancel{x^2}-5x+7\cancel{-x^2}+2x)}{x-2}]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+7}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(-3+\boxed{\frac{7}{x}})}{\cancel{x}(1-\boxed{\frac{2}{x}})}=\frac{-3}{1}=-3\rightarrow\boxed{n=-3}$$

Kosa asimptota je prava $y=x-3$

Da nacrtamo ovu pravu, kao i uvek uzmemo dve proizvoljne tačke:

x	0	3
y	-3	0

Na slici bi ovo bilo:



2. Odrediti asimptote funkcija:

a) $y = x \cdot \ln^2 x$

b) $y = \ln \dfrac{x-2}{x+1}$

<u>Rešenje:</u>

a) $y = x \cdot \ln^2 x$

Oblast definisanosti (domen)

Jedino nam smeta ln , pa je $x > 0 \to D_f = (0, \infty)$
Ovo nam govori da ćemo da tražimo limes samo za desne strane kad $x \to 0$, jer sa leve strane od nule, funkcija ne postoji.

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>vertikalna asimptota</u>

$\lim\limits_{\substack{x \to 0+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} x \cdot \ln^2 x = (0+\varepsilon)\ln^2(0+\varepsilon) = 0 \cdot (-\infty)^2 = 0 \cdot \infty$ ovo je neodredjen izraz, pa ga pripremamo za Lopitala...

$$\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} x\cdot\ln^2 x = \lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = lopital = \lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{x^2})} = -2\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = opet\ lopital =$$

$$= -2\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{x^2})} = 2\lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} x = 2\cdot 0 = 0$$

Ovo nam govori da funkcija nema vertikalnu asimptotu **(strelica na slici!)**

<u>horizontalna asimptota:</u>

Sad nema smisla tražiti limes kad $x\to-\infty$ jer na tu stranu funkcija nije definisana…

Tražimo samo:

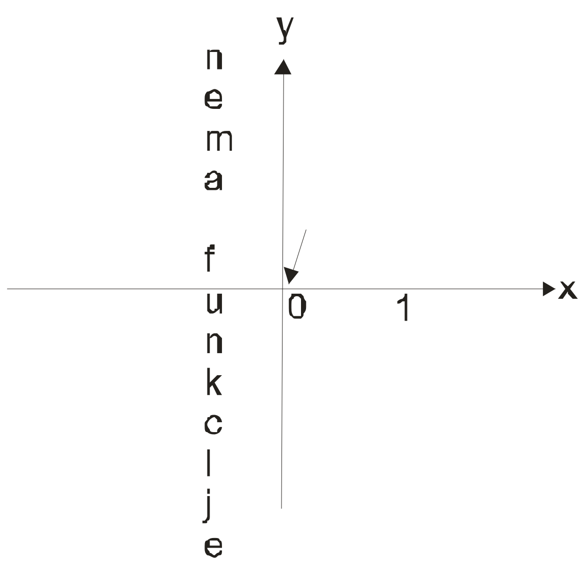
$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln^2 x = \infty\cdot\infty = \infty$$

Dakle, nema ni horizontalne asimptote.

<u>Kosa asimptota:</u>

$$\text{k}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\ln^2 x}{\cancel{x}} = \lim_{x\to\infty}\ln^2 x = \infty$$

Nema ni kose asimptote….



b) $y = \ln\frac{x-2}{x+1}$

Oblast definisanosti (domen)

Kao što već znamo,sve iza ln mora da je veće od 0.

$$\frac{x-2}{x+1} > 0$$

	-∞ -1	2	∞
x-2	−	−	+
x+1	−	+	+
$\frac{x-2}{x+1}$	+	−	+

$$D_f = (-\infty,-1)\cup(2,\infty)$$

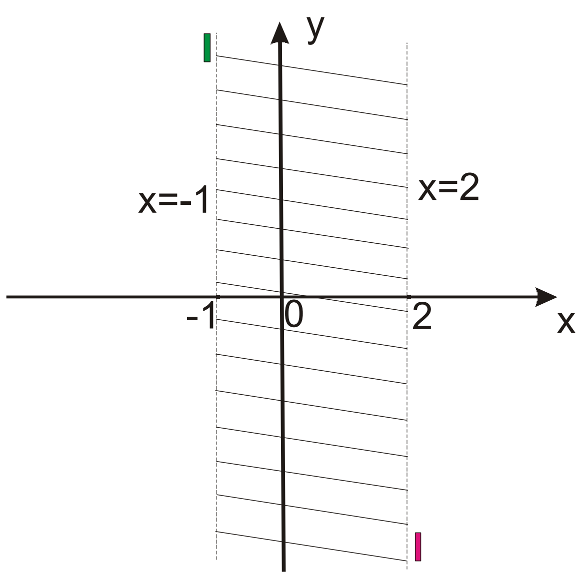
Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>vertikalna asimptota</u>

$\lim_{x\to 2+\varepsilon} \ln\frac{x-2}{x+1} =$ [Kako je ln neprekidna funkcija, ona može da zameni mesto sa lim]=

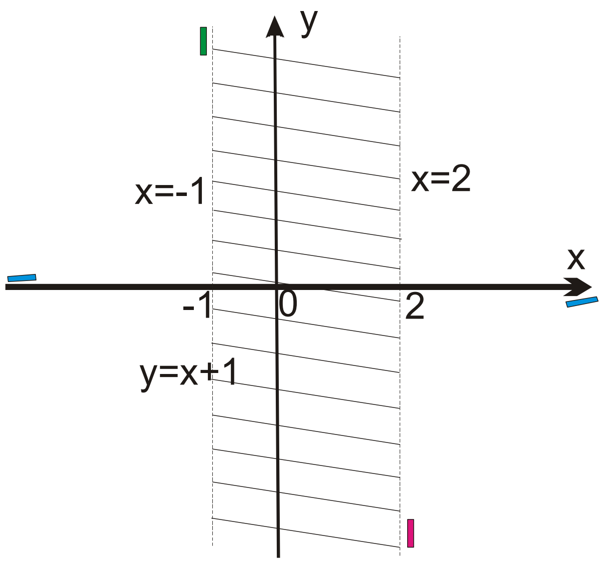
$\ln\frac{2+\varepsilon-2}{2+1} = \ln 0 = -\infty$ (crvena crta)

$\lim_{x\to -1-\varepsilon} \ln\frac{x-2}{x+1} = \ln\frac{-1-2}{-1-\varepsilon+1} = \ln\frac{-3}{-\varepsilon} = \ln\infty = \infty$ (zelena crta)



horizontalna asimptota:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x-2}{x+1} = \ln \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x+1} = \ln 1 = 0$ Dakle y = 0 (x- osa) je horizontalna asimptota.(plave crtke)



Pošto imamo horizontalnu asimptotu , kose nema.

3. Odrediti asimptote funkcija:

a) $y = xe^x$

b) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

<u>Rešenje:</u>

a) $y = xe^x$

Oblast definisanosti (domen)

Ova funkcija je svuda definisana, jer nema razlomka a funkcija e^x je definisana za svako x iz skupa R.

Dakle $x \in (-\infty, \infty)$. Ovo nam odmah govori da funkcija **nema vertikalne asimptote**!

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Kao što smo već rekli , nema vertikalne asimptote!

Horizontalna asimptota

Jedan mali savet : Kod funkcija koje imaju e^x, radite posebno limese kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$, jer važi da je

$e^{\infty} = \infty$

$e^{-\infty} = 0$

Dakle:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty$$

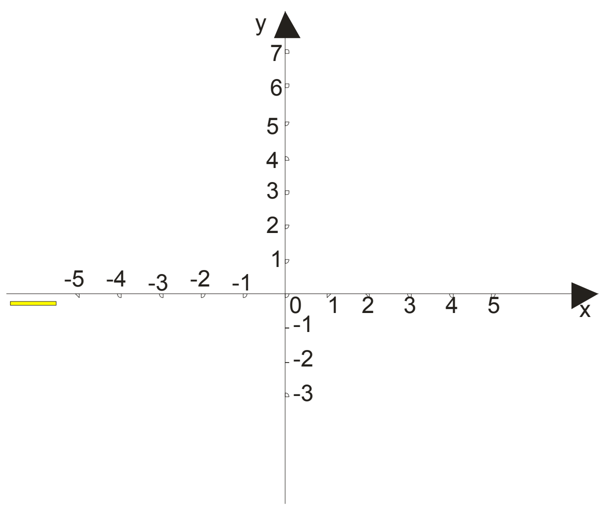
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = ?$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{-(-\infty)}} = \frac{-\infty}{\infty} = lopital = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0_{-}$$

Šta nam ovo govori?

Kad $x \to +\infty$ ne postoji horizontalna asimptota , ali kad $x \to -\infty$ imamo horizontalnu asimptotu y=0, odnosno,

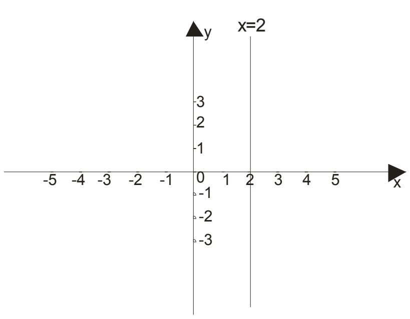
Kad x teži $-\infty$, funkcija se približava nuli sa donje, negativne strane! To je ovo 0_{-} u rešenju. (žuta crtka)



b) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Oblast definisanosti (domen)

$x - 2 \neq 0 \to x \neq 2 \to x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$



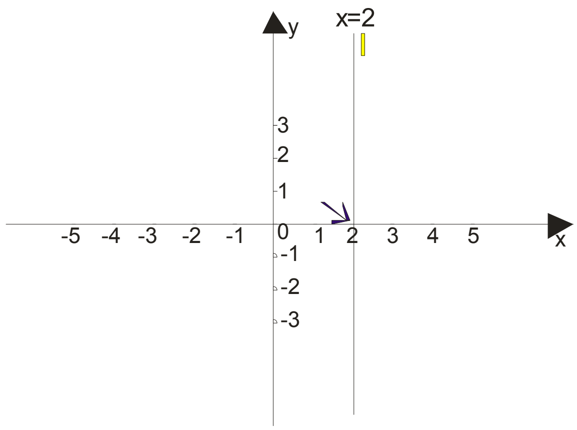
Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna asimptota

$$y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x \to 2+\varepsilon} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2+\varepsilon-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{+\varepsilon}} = 2 \cdot e^{\infty} = \infty \qquad \text{(žuta crta)}$$

$$\lim_{x \to 2-\varepsilon} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2-\varepsilon-2}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{-\varepsilon}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot 0 = 0 \qquad \text{(strelica)}$$



Horizontalna asimptota

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty-2}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot e^{0} = \infty \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty-2}} = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^{0} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Nema horizontalne asimptote, pa moramo ispitati da li postoji kosa asimptota!

Kosa asimptota

y= kx+n

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x-2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{\infty-2}} = e^{0} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} [xe^{\frac{1}{x-2}} - 1 \cdot x] = \lim_{x \to \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x-2}} - 1) = \infty \cdot 0 = ?$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = lopital = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (-\frac{1}{(x-2)^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1 \cdot 1 = 1$$

Dobili smo kosu asimptotu :

y= kx + n   pa je y = x + 1

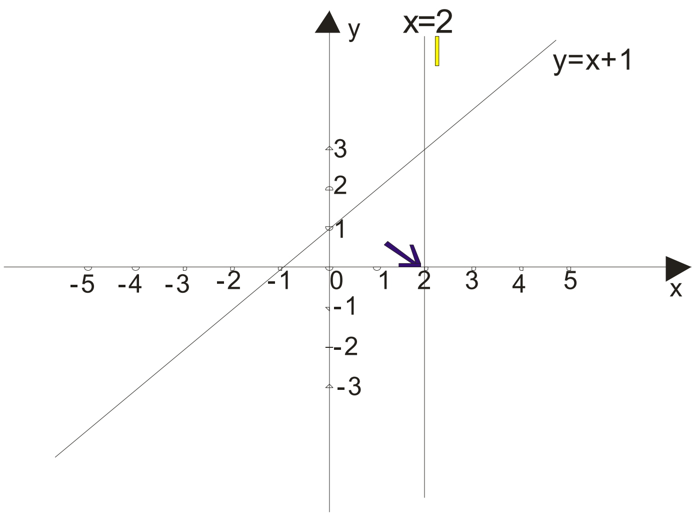
Davidimo kako ona izgleda:

Za x=0

$y = 0 + 1 = 1$

Za y=0

$0 = x + 1 \rightarrow x = -1$



x	0	-1
y	1	0