PREVOJNE TAČKE
KONVEKSNOST i KONKAVNOST

Funkcija f(x) je konveksna na intervalu (a,b) ako je f``(x) > 0 na (a,b)

Funkcija f(x) je konkavna na intervalu (a,b) ako je f``(x) < 0 na (a,b)

Neka u tački $x = x_0$ važi da je $f``(x_0) = 0$. Ako f``(x) menja znak u okolini tačke x_0,

onda je $x = x_0$ prevojna tačka f(x).

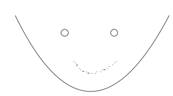
Šta konkretno radimo?

Nadjemo y`` i to izjednačimo sa 0 (naravno, samo brojilac).

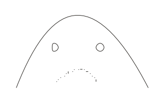
Rešenja te jednačine $x_1, x_2, ...$ (naravno ako ih ima) menjamo u početnu funkciju da dobijemo $y_1, y_2, ...$

Dobijene tačke $P_1(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2); ....$ su prevojne tačke funkcije.

Dalje razmišljamo od čega nam zavisi znak drugog izvoda i rešavamo nejednačine $y`` > 0 \wedge y`` < 0$.



Funkcija je **konveksna** na intervalima na kojima je $y`` > 0$, to jest “ smeje se”



Funkcija je **konkavna** na intervalima na kojima je $y`` < 0$, to jest “ tužna je ”

Prevojna tačka je mesto gde funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost ili obrnuto…

Evo malo primera….

1**. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti i naći prevojne tačke (ukoliko postoje)**

a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

b) $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

v) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$

g) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

d) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$

Rešenje:

a) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

Naravno, najpre da nadjemo prvi izvod:

$$y`=\frac{(1+x)`(1-x)-(1-x)`(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y`=\frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y`=\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$y`=\frac{2}{(1-x)^2}$$

Sad tražimo drugi izvod, al je bolje da prvi izvod napišeno u obliku: **y` =** $\dfrac{2}{(1-x)^2}=2(1-x)^{-2}$

$$y`=2(1-x)^{-2}$$

$$y``=2(-2)(1-x)^{-2-1}\cdot(1-x)`$$

$$y``=-4(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$

$$y``=\frac{4}{(1-x)^3}$$

U brojiocu je samo 4 pa zaključujemo da nema prevojnih tačaka.

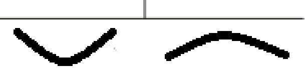
Dalje se pitamo od čega nam zavisi znak drugog izvoda….

		1
4	+	+
1-x	+	-
y``	+	-

Gde je + tu se funkcija smeje (konveksna je)

Gde je – tu je funkcija tužna (konkavna je)

	-∞	1 ∞
4	+	+
1-x	+	-
y``	+	-



b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

$$y` = \frac{(x^2 - 4)`(x-1) - (x-1)`(x^2 - 4)}{(x-1)^2}$$

$$y` = \frac{2x(x-1) - 1(x^2 - 4)}{(x-1)^2}$$

$$y` = \frac{2x^2 - 2x - 1x^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

Sad tražimo drugi izvod:

$$y` = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

$$y`` = \frac{(x^2 - 2x + 4)`(x-1)^2 - ((x-1)^2)`(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4}$$

$$y`` = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4}$$ gore izvučemo x-1 ispred zagrade

$$y`` = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x + 4)]}{(x-1)^4}$$

$$y`` = \frac{[2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x - 8]}{(x-1)^3}$$

$$y`` = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

Zaključujemo da funkcija nema prevojnih tačaka, jer je $-6 \neq 0$.

Konveksnost i konkavnost ispitujemo :

	$-\infty$	1 ∞
-6	−	−
x-1	−	+
y``	+	−

v) $y = \ln\frac{x-2}{x+1}$

$$y = \ln\frac{x-2}{x+1}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{(x-2)'(x+1)-(x+1)'(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x+1}}{x-2}\cdot\frac{1(x+1)-1(x-2)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1-x+2}{(x-2)(x+1)}$$

$$y' = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

$$y = \ln\frac{x-2}{x+1}$$

$$y' = \frac{3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{pazi} \quad \left(\frac{1}{\otimes}\right)' = -\frac{1}{\otimes^2}\cdot\otimes'$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2}[(x-2)(x+1)]'$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2}[1(x+1)+1(x-2)]$$

$$y'' = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2}(2x-1)$$

$$y'' = \frac{3(1-2x)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

y`` = 0 za 1-2x = 0 pa je $x = \frac{1}{2}$, ali **PAZI** , ova tačka **NE PRIPADA** oblasti definisanosti , pa funkcija nema prevoj.

$$y'' > 0 \rightarrow 1-2x > 0 \rightarrow x < \frac{1}{2} \rightarrow x < -1$$

$$y'' < 0 \rightarrow 1-2x < 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow x > 2$$

g) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

$y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ moramo kao izvod proizvoda i pazimo da je $e^{\frac{1}{x-2}}$ složena funkcija $(e^{\Theta})' = e^{\Theta} \cdot \Theta'$

$$y' = 1 \cdot e^{\frac{1}{x-2}} + (e^{\frac{1}{x-2}})' \cdot x$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (\frac{1}{x-2})' \cdot x$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (-\frac{1}{(x-2)^2}) \cdot x = e^{\frac{1}{x-2}} - e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot x = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (1 - \frac{x}{(x-2)^2}) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{(x-2)^2 - x}{(x-2)^2}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4 - x}{(x-2)^2}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

$$y'' = (e^{\frac{1}{x-2}})' \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} + (\frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2})' e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (-\frac{1}{(x-2)^2}) \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} + \frac{(x^2 - 5x + 4)' \cdot (x-2)^2 - ((x-2)^2)' \cdot (x^2 - 5x + 4)}{(x-2)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

Posle sredjivanja dobijamo:

$$y'' = \frac{5x - 8}{(x-2)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$y'' = 0 \rightarrow 5x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8}{5}$$

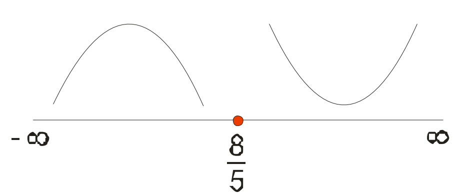
$$Za\ x = \frac{8}{5} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{\frac{1}{\frac{8}{5}-2}} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{\frac{1}{-\frac{2}{5}}} \rightarrow y = \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}}$$

Tačka prevoja je dakle : $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}})$

Znak drugog izvoda nam zavisi samo od 5x- 8 jer su ostali izrazi pozitivni:

$$y'' > 0 \rightarrow 5x - 8 > 0 \rightarrow x > \frac{8}{5}$$

$$y'' < 0 \rightarrow 5x - 8 < 0 \rightarrow x < \frac{8}{5}$$



$$y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y'=\frac{(x-2)'\cdot\sqrt{x^2+2}-(\sqrt{x^2+2})'\cdot(x-2)}{(\sqrt{x^2+2})^2}$$ pazi , $\sqrt{x^2+2}$ mora kao složena funkcija...

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot(x^2+2)'\cdot(x-2)}{x^2+2}$$

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}\cdot\cancel{2}x\cdot(x-2)}{x^2+2}$$

$$y'=\frac{\frac{(\sqrt{x^2+2})^2-x(x-2)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

$$y'=\frac{x^2+2-x^2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y'=\frac{2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y'=\frac{2(x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$ ili ako odmah pripremimo za drugi izvod $y'=\frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$

$$y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y'=\frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y''=2\frac{(x+1)'\cdot(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-((x^2+2)^{\frac{3}{2}})'(x+1)}{((x^2+2)^{\frac{3}{2}})^2}$$

$$y''=2\frac{1\cdot(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{3}{2}-1}(x^2+2)'\cdot(x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y''=2\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x\cdot(x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y''=2\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}-3(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot x\cdot(x+1)}{(x^2+2)^3}$$ izvučemo zajednički $(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$ u brojiocu

$$y''=2\frac{\cancel{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}[x^2+2-3x\cdot(x+1)]}{(x^2+2)^{\cancel{3}}}$$

$$y''=2\frac{x^2+2-3x^2-3x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y''=2\frac{-2x^2-3x+2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$y`` = 0$

$-2x^2 - 3x + 2 = 0 \to x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to x_1 = -2 \wedge x_2 = \dfrac{1}{2}$

Za $x_1 = -2 \to y_1 = \dfrac{-4}{\sqrt{6}}$

Za $x_2 = \dfrac{1}{2} \to y_1 = -1$

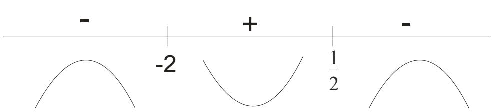
Imamo dve prevojne tačke:

$\mathrm{P}_1(-2, \dfrac{-4}{\sqrt{6}})$

$P_2(\dfrac{1}{2}, -1)$

Znak drugog izvoda opet zavisi samo od izraza u brojiocu $-2x^2 - 3x + 2$.

Upotrebićemo da kvadratni trinom ima znak broja *a = -2* svuda osim izmedju nula!



www.matematiranje.in.rs