EKSTREMNE VREDNOSTI I MONOTONOST FUNKCIJE

EKSTREMNE VREDNOSTI su maksimum i (ili) minimum funkcije.

Nadjemo prvi izvod y\` i izjednačimo ga sa 0 , $y\text{\`}=0$.

Rešenja te jednačine $x_1, x_2, ...$ (naravno ako ih ima) menjamo u početnu funkciju da dobijemo $y_1, y_2, ...$

Dobijene tačke $M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2); ....$ su ekstremne vrednosti funkcije.

MONOTONOST FUNKCIJE je rašćenje i opadanje funkcije.

U intervalima (naravno ako ih ima) gde je $y\text{\`}>0$ funkcija RASTE.

U intervalima (naravno ako ih ima) gde je $y\text{\`}<0$ funkcija OPADA.

1. **Odrediti ekstremne vrednosti i intervale monotonosti funkcija:**

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $y=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$

Rešenje:

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Posao nam je dakle da nađemo prvi izvod!

Ovo je izvod količnika pa idemo po formuli $\left(\dfrac{u}{v}\right)\text{\`}=\dfrac{u\text{\`}\cdot v-v\text{\`}\cdot u}{v^2}$

$$y\text{\`}=\frac{(x^2+1)\text{\`}(x^2-1)-(x^2-1)\text{\`}(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$y\text{\`}=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$y\text{\`}=\frac{2x[(x^2-1)-(x^2+1)]}{(x^2-1)^2}=\frac{2x[\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-1]}{(x^2-1)^2}$$

$$y\text{\`}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Sad prvi izvod izjednačavamo sa 0.

Zapamtite da **uvek brojilac izjednačavamo sa 0** jer smo se u oblasti definisanosti već ogradili da u imeniocu nije 0.

$y` = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \to -4x = 0 \to \boxed{x=0}$

Sad ovu vrednost menjamo u početnu funkciju $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$:

$f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = \frac{1}{-1} = -1 \to M_1(0,-1)$ Dobili smo tačku ekstrema! Za sad ne znamo da li je max ili min.

Za monotonost funkcije trebamo da rešimo nejednačine: $y`>0$ **( raste) i** $y`<0$ **(opada)**

Postavljamo sebi pitanje: (slično kao kod znaka funkcije) **Od čega nam zavisi znak prvog izvoda?**

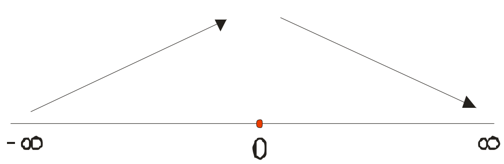
Pogledajmo još jednom prvi izvod: $y` = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

Izraz $(x^2-1)^2 > 0$ uvek (zbog kvadrata) pa ne utiče na razmatranje znaka.

Zaključujemo da nam znak prvog izvoda zavisi samo od -4x. Dakle:

$y`>0$ za $-4x > 0 \to x < 0$.......*raste*
$y`<0$ za $-4x < 0 \to x > 0$.......*opada*

Na skici bi to izgledalo:



E sad smo sigurni da je naša tačka $M_1(0,-1)$ maksimum!

b) $y = \frac{x^2+3x}{x+4}$

$$y` = \frac{(x^2+3x)`\cdot(x+4)-(x+4)`\cdot(x^2+3x)}{(x+4)^2}$$

$$y` = \frac{(2x+3)\cdot(x+4)-1\cdot(x^2+3x)}{(x+4)^2}$$

$$y` = \frac{2x^2+8x\cancel{+3x}+12-x^2\cancel{-3x}}{(x+4)^2}$$

$$y` = \frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}$$

Izjednačavamo prvi izvod sa 0.

$$y` = \frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2} = 0 \to x^2+8x+12=0$$

Da rešimo ovu kvadratnu jednačinu:

$$x^2+8x+12=0 \to x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-48}}{2} \to \begin{matrix} x_1=-6 \\ x_2=-2 \end{matrix}$$

Obe vrednosti vraćamo u početnu jednačinu $y = \dfrac{x^2+3x}{x+4}$

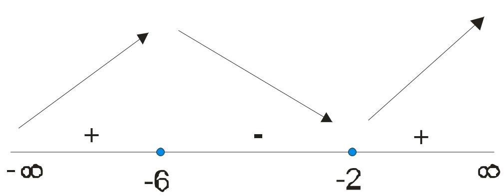
$$x_1=-6 \to y_1 = \frac{(-6)^2+3(-6)}{-6+4} = -9 \to M_1 = (-6,-9)$$
$$x_2=-2 \to y_2 = \frac{(-2)^2+3(-2)}{-2+4} = -1 \to M_2 = (-2,-1)$$

Za **monotonost** razmišljamo od čega nam zavisi znak prvog izvoda!

$y` = \dfrac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}$ a kako $(x+4)^2>0$ uvek, znači da nam znak zavisi samo od $x^2+8x+12$.

Kao i uvek kad imamo kvadratnu nejednačinu koristimo da :

Kvadratni trinom ima znak broja a svuda osim izmedju nula!



Znači da funkcija raste za $y`>0$ za $x \in (-\infty,-6) \cup (-2,\infty)$

Funkcija opada $y`<0$ za $x \in (-6,-2)$

Sad nam nije teško da kažemo da je :

Tačka $M_1 = (-6,-9)$ je tačka maksimuma

Tačka $M_2 = (-2,-1)$ je tačka minimuma.

2. **Odrediti ekstremne vrednosti i intervale monotonosti funkcija:**

a) $y=\frac{5-e^x}{e^x+2}$

b) $y=\frac{x^2-3}{e^x}$

v) $y=\frac{\ln x+1}{\ln x}$

Rešenje:

a) $y=\frac{5-e^x}{e^x+2}$

$$y`=\frac{(5-e^x)`(e^x+2)-(e^x+2)`(5-e^x)}{(e^x+2)^2}$$

$$y`=\frac{-e^x(e^x+2)-e^x(5-e^x)}{(e^x+2)^2}$$ izvlačimo - e^x kao zajednički ispred zagrade

$$y`=\frac{-e^x(e^x+2+5-e^x)}{(e^x+2)^2}$$

$$y`=\frac{-7e^x}{(e^x+2)^2}$$ Sada ovo izjednačavamo sa 0.

$y`=0 \rightarrow -7e^x=0 \rightarrow e^x=0$ ali znamo da je $e^x>0$ pa zaključujemo da ova funkcija **nema** ekstremne vrednosti!

Dalje razmišljamo od čega nam zavisi znak prvog izvoda....

Kako je $(e^x+2)^2>0$ uvek i $e^x>0$ ostaje nam da znak zavisi samo od -7 .

Zaključujemo da je funkcija **opadajuća** stalno!

b) $y=\frac{x^2-3}{e^x}$

$$y`=\frac{\left(x^2-3\right)`\cdot e^x-\left(e^x\right)`\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

$$y`=\frac{2x\cdot e^x-e^x\left(x^2-3\right)}{e^{2x}}$$

$$y`=\frac{\cancel{e^x}[2x-\left(x^2-3\right)]}{e^{\cancel{2}x}}$$

$$y`=\frac{2x-x^2+3}{e^x}$$

$$y`=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$$

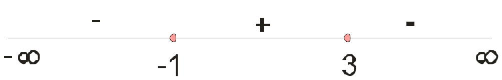
Odavde je $y`=0 \rightarrow -x^2+2x+3=0$ a rešenja ove kvadratne jednačine su $x_1=-1 \wedge x_2=3$

Ove vrednosti vraćamo u početnu funkciju $y=\dfrac{x^2-3}{e^x}$:

$$x_1=-1 \rightarrow y_1=\frac{(-1)^2-3}{e^{-1}}=\frac{-2}{e^{-1}}=-2e \rightarrow M_1(-1,-2e)$$
$$x_2=3 \rightarrow y_2=\frac{(3)^2-3}{e^3}=\frac{6}{e^3} \rightarrow M_2(3,\frac{6}{e^3})$$

Za odredjivanje monotonosti opet koristimo znanje iz II godine srednje da:

Kvadratni trinom $-x^2+2x+3$ **ima znak broja a svuda osim izmedju nula!**



Odavde zaključujemo da:

$$y`>0 \quad za \quad x\in(-1,3) \rightarrow raste$$
$$y`<0 \quad za \quad x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty) \rightarrow opada$$

Onda je tačka $M_1(-1,-2e)$ tačka minimuma a tačka $M_2(3,\frac{6}{e^3})$ tačka maksimuma.

v) $y=\dfrac{\ln x+1}{\ln x}$

$$y`=\frac{(\ln x+1)`\ln x-(\ln x)`(\ln x+1)}{\ln^2 x}$$
$$y`=\frac{\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}(\ln x+1)}{\ln^2 x}$$
$$y`=\frac{\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$y`=\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$ **pa je** $$y`=\frac{-1}{x\ln^2 x}$$

Očigledno je da nemamo ekstremnih vrednosti jer je u brojiocu samo -1.

Iz oblasti definisanosti funkcije bi našli da je $(\ln x\neq 0 \rightarrow x\neq 1)\wedge(x>0)\rightarrow D_f=(0,1)\cup(1,\infty)$ a to nam govori o znaku prvog izvoda:

$x>0 \wedge \ln^2 x>0 \rightarrow$ znak zavisi samo od -1 a onda je funkcija **stalno opadajuća**!

3. **Odrediti ekstremne vrednosti i intervale monotonosti funkcija:**

a) $y = e^{x^2+2x-3}$

b) $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$

v) **y = arc tg** $\frac{1+x}{1-x}$

Rešenje:

a) $y = e^{x^2+2x-3}$

Pazite, ovde se radi o izvodu složene funkcije:

$$y = e^{x^2+2x-3}$$
$$y' = e^{x^2+2x-3}(x^2+2x-3)'$$
$$y' = e^{x^2+2x-3}(2x+2)$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x+2=0 \rightarrow \boxed{x=-1}$$

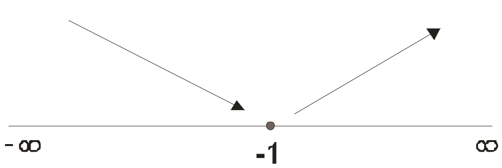
$$y = e^{(-1)^2+2(-1)-3} = e^{1-2-3} = e^{-4} = \boxed{\frac{1}{e^4}}$$

Tačka ekstrema je dakle $M(-1,\frac{1}{e^4})$.

Kako je $e^{x^2+2x-3} > 0$ uvek, znak nam zavisi od $2x+2$, pa je:

$y' > 0 \quad za \quad 2x+2 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow x \in (-1,\infty) \rightarrow$ *raste*

$y' < 0 \quad za \quad 2x+2 < 0 \rightarrow x < -1 \rightarrow x \in (-\infty,-1) \rightarrow$ *opada*



Sad znamo da je tačka $M(-1,\frac{1}{e^4})$ minimum date funkcije.

b) $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$

$$y` = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)`$$ ovde pazimo, jer je $(\frac{1+x}{1-x})`$ izvod količnika!

$$y` = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\frac{(1+x)`(1-x)-(1-x)`(1+x)}{(1-x)^2}$$ skratimo po 1-x (koje je različito od 0 još iz domena)

$$y` = \frac{1}{1+x}\frac{1-x+1+x}{1-x}$$

$$y` = \frac{1}{1+x}\frac{2}{1-x}$$

$$y` = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

Jasno je da funkcija nema ekstremne vrednosti ….Da ispitamo monotonost treba nam tablica ….

		-1	1
1-x	+	+	-
1+x	-	+	+
y`	-	+	-
		↗	

E sad, ako malo razmislimo, vidimo da se ova tablica poklapa sa tablicom za oblast definisanosti: $D_f = (-1,1)$

Znači da je funkcija RASTUĆA na celom domenu!

Ovo je ono što mi pokušavamo da vas naučimo: Svaka tačka u ispitivanju toka funkcije priča svoju priču i nešto ta priča znači na grafiku ali su opet sve tačke u ispitivanju povezane i ne mogu jedna bez druge….

v) y = arc tg $\frac{1+x}{1-x}$

Još jedna složena funkcija, pa izvod radimo pažljivo….

$$y` = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^`$$

$$y` = \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\frac{(1+x)`(1-x)-(1-x)`(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y` = \frac{1}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}}\frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2}$$ **pokratimo (1-x)²**

$$y` = \frac{1}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}\frac{1-x+1+x}{1}$$ **sredimo malo...**

$$y` = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$\mathbf{y`} = \frac{1}{1+x^2}$$

Jasno je da nema ekstrema a kako je $1+x^2$ uvek pozitivan, funkcija je stalno rastuća!