

PARNOST i NEPARNOST FUNKCIJE PERIODIČNOST FUNKCIJE

PARNOST i NEPARNOST FUNKCIJE

Ako je $f(-x) = f(x)$ funkcija je parna i tada je grafik simetričan u odnosu na y osu

Ako je $f(-x) = -f(x)$ funkcija je neparna i tada je grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak

Šta mi u zadatku konkretno radimo?

Krenemo od $f(-x)$ i gde vidimo x stavimo $-x$, to malo sredimo, možemo dobiti da je sve jednako:

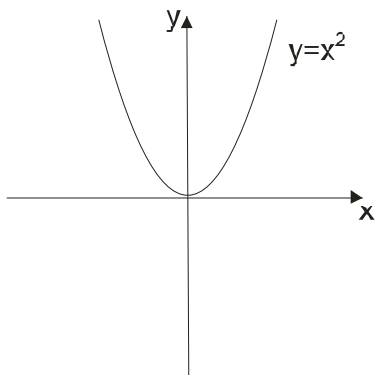
- i) $f(x)$ i onda kažemo da je funkcija parna
- ii) $-f(x)$ i onda kažemo da je funkcija neparna
- iii) nijedno od ova dva (onda kažemo da funkcija nije ni parna ni neparna)

Kad profesori objašnjavaju deci parnost i neparnost funkcije, najčešće kao primer navode: $y = x^2$ i $y = x^3$

Za $y = x^2$ (znamo da je $y = f(x)$, pa prvo y zamenimo sa $f(x)$)

$$f(x) = x^2$$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ Znači da je ova funkcija parna. Pogledajmo to i na grafiku:

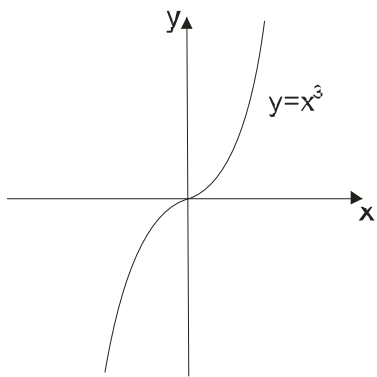


Vidimo da je grafik **simetričan u odnosu na y osu**.

Za $y = x^3$

$$f(x) = x^3$$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ Znači da je ova funkcija neparna. Pogledajmo i nju na grafiku:



Grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak!

Evo još nekoliko primera :

1. Ispitati parnost i neparnost sledećih funkcija:

a) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$

v) $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 4}$

Rešenje:

a) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x) \rightarrow \text{parna}$$

b) $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$$

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-2x^3}{x^2 - 4} = -\frac{2x^3}{x^2 - 4} = -f(x) \rightarrow \text{neparna}$$

$$v) y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 4}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 4}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4(-x) - 5}{-x - 4} = \frac{x^2 - 4x - 5}{-x - 4} \rightarrow \text{nije ni parna ni neparna}$$

2. Ispitati parnost i neparnost sledećih funkcija:

$$a) y = \frac{1}{\ln(x+3)-1}$$

$$b) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

$$v) y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

Rešenje:

$$a) y = \frac{1}{\ln(x+3)-1}$$

Kod ln funkcija najčešće se desi da funkcija nije ni parna ni neparna, zbog oblasti definisanosti.

Za ovu našu funkciju oblast definisanosti je:

$$\ln(x+3)-1 \neq 0 \rightarrow \ln(x+3) \neq 1 \rightarrow x+3 \neq e \rightarrow x \neq e-3 \text{ (zbog razlomka)}$$

$$x+3 > 0 \rightarrow x > -3 \text{ (zbog ln funkcije)}$$

$$\text{Pa je domen: } D_f = (-3, e-3) \cup (e-3, \infty)$$

U ovoj i sličnim situacijama napišete:

Oblast definisanosti funkcije nije simetrična u odnosu na koordinatni početak pa nema smisla govoriti o parnosti i neparnosti. To jest, **funkcija nije ni parna ni neparna!**

$$b) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f(-x) = \arcsin \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = \arcsin \frac{-2x}{1+x^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x) \rightarrow \text{neparna}$$

Naravno, od pre znamo da je $\arcsin(-\Theta) = -\arcsin \Theta$.

$$v) y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

$$f(-x) = \sqrt{1 - e^{-(-x)^2}} = \sqrt{1 - e^{-x^2}} = f(x) \rightarrow \text{parna}$$

3. Data je funkcija $f(x) = \frac{(1+a^x)^2}{a^x}$. Dokazati da je parna.

Rešenje:

$$f(-x) = \frac{(1+a^{-x})^2}{a^{-x}} = \frac{(1+\frac{1}{a^x})^2}{\frac{1}{a^x}} = \frac{(\frac{a^x+1}{a^x})^2}{\frac{1}{a^x}} = \frac{(a^x+1)^2}{(a^x)^2} \cdot \frac{a^x}{1} = \frac{a^x(a^x+1)^2}{(a^x)^2} = \frac{(1+a^x)^2}{a^x} = f(x) \rightarrow \text{parna}$$

4. Data je funkcija $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$. Dokazati da je neparna.

Rešenje:

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \log(-x + \sqrt{1+x^2}) = \log(\sqrt{1+x^2} - x)$$

Sad izvršimo racionalizaciju unutar logaritma.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log(\sqrt{1+x^2} - x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) = \\ &= \log\left(\frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) = \log\left(\frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Imamo pravilo za logaritme: $\log_A B^n = n \log_A B$, pa je:

$$f(-x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1} = -\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -f(x) \rightarrow \text{neparna}$$

PERIODIČNOST FUNKCIJE

Periodičnost se odnosi na trigonometrijske funkcije.

Najčešće periodičnost nije lako odrediti, traži poznavanje trigonometrije na “naprednom nivou”, zato vam predlažemo da se detaljno podsetite trigonometrijskih funkcija (Ima sve detaljno u II godina).

Mi ćemo da vas podsetimo da se kod $y = a \sin(bx + c) \wedge y = a \cos(bx + c)$ perioda traži po formuli $\omega = \frac{2\pi}{b}$, gde je b broj koji se nalazi ispred x (naravno, kad sklopimo funkciju u ovom obliku).

Kod $y = a \cdot \operatorname{tg}(bx + c) \wedge y = a \cdot \operatorname{ctg}(bx + c)$ perioda je $\omega = \frac{\pi}{b}$.

Evo nekoliko primera:

5. Odrediti osnovni period za funkcije:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$

b) $y = \sin x + \cos x$

v) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Rešenje:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$

Da najpre upakujemo zadatu funkciju:

$$y = \sin x \cdot \cos x = \frac{2}{2} \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \boxed{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Odavde vidimo da je broj ispred x -sa $b=2$.

$$\omega = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi \rightarrow \boxed{\omega = \pi} \text{ je osnovna perioda ove funkcije.}$$

b) $y = \sin x + \cos x$

$$y = \sin x + \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{(\sqrt{2})^2}{\cancel{\sqrt{2}}} \left(\boxed{\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4}} \right)$$

ovo je adicione formula

$$y = \sqrt{2} \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Odavde je $b=1$ pa je $\omega = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \rightarrow \boxed{\omega = 2\pi}$

$$v) y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

Ovde ćemo krenuti od osnovne identičnosti:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \dots\dots\dots ()^2$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2$$

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{4}{2}\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{4} + \frac{\cos 4x}{4}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Mi dakle posmatramo funkciju:

$$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Ovde je $b=4$ pa je $\omega = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{\pi}{2}}$