OBLAST DEFINISANOSTI FUNKCIJE (DOMEN)

Prva tačka u ispitivanju toka funkcije je odredjivanje oblasti definisanosti , u oznaci D_f .

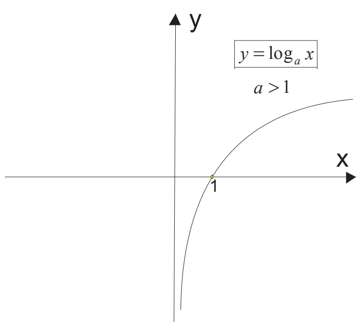
Pre nego što krenete sa proučavanjem ovog fajla, obavezno pogledajte fajl ELEMENTARNE FUNKCIJE , jer se na osnovu toga i radi odredjivanje oblasti definisanosti funkcija.

1. Ako je data racionalna funkcija ili funkcija u kojoj bilo gde imamo razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ onda je $Q(x) \neq 0$, odnosno sve što je u imeniocu **mora** biti različito od 0.

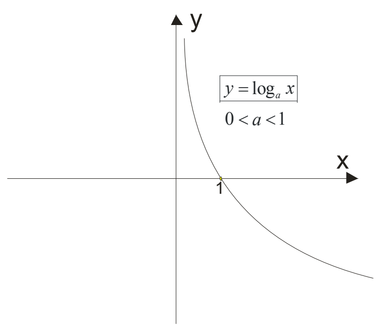
2. Ako je data logaritamska funkcija , onda sve iza logaritma mora biti veće od 0. (log$\otimes$ ili ln $\otimes$, onda je $\otimes > 0$)

   Zašto ovo?

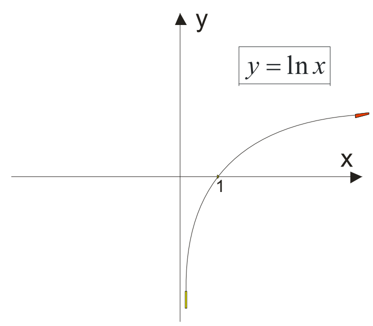
   Podsetimo se grafika logaritamskih funkcija:



slika 1



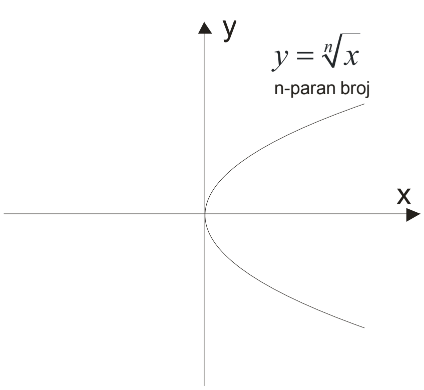
slika 2

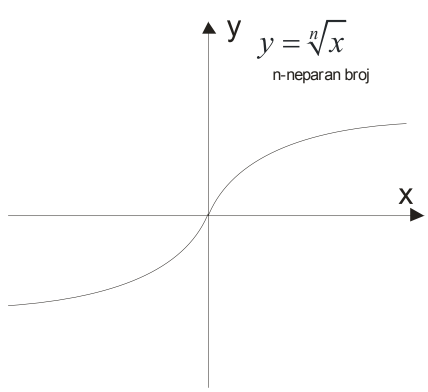


slika 3

   Vidimo da je logaritamska funkcija postoji samo za vrednosti x koje su veće od 0. U situaciji kad iza *log* ili *ln* nije samo x već neka funkcija od x (recimo $\otimes$) cela ta funkcija mora biti veća od 0. ($\otimes > 0$)

3. Ako nam je data korena funkcija, onda moramo razlikovati dve situacije: kada je u pitanju paran koren (2,4,6....) i kad je u pitanju neparan koren (3,5,7...)



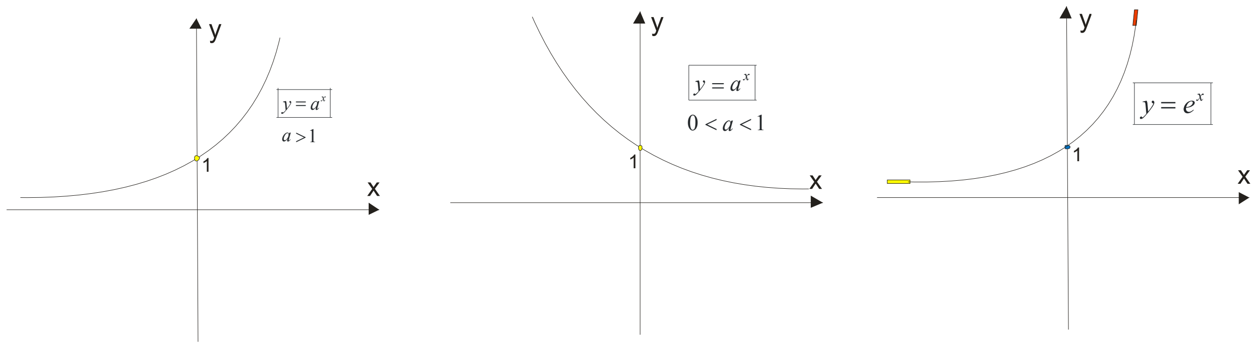


Iz grafika elementarnih funkcija možemo zaključiti da je :

i) Ako imamo $y=\sqrt[n]{\Delta}, n-paran$ onda je $\Delta \geq 0$, dakle sve unutar korena je veće ili jednako 0.

ii) Ako imamo $y=\sqrt[n]{\Delta}, n-neparan$ onda je ta funkcija svuda definisana , sem naravno ako u izrazu Δ nema nešto drugo da nam smeta.

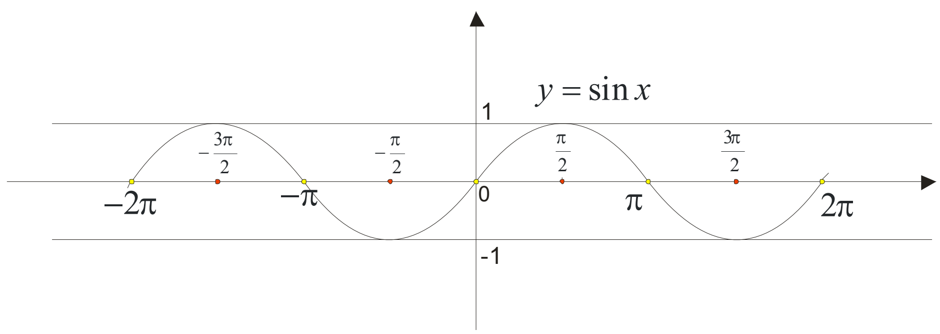
4. U slučaju kada su nam date eksponencijalne funkcije $y=a^x$ odnosno $y=e^x$, funkcija je svuda definisana:

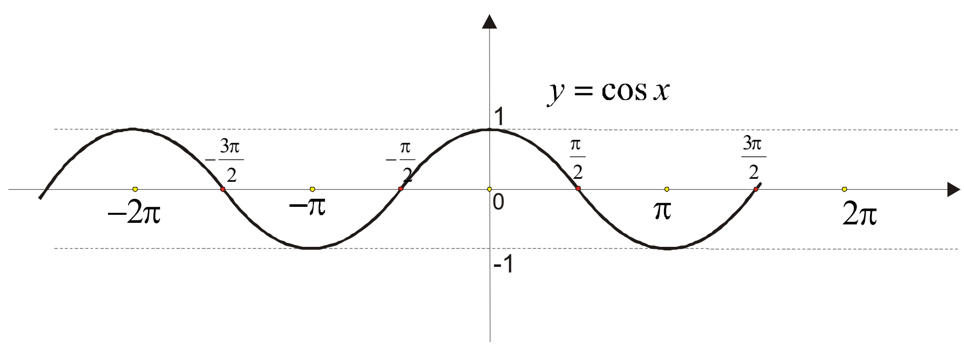


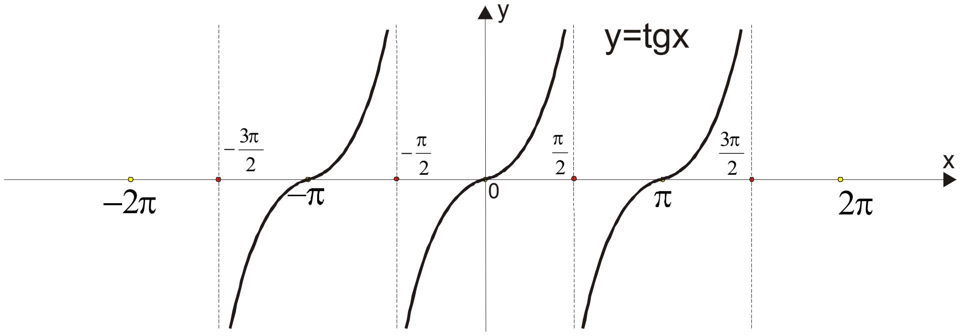
Trebamo voditi računa da ako u eksponentu postoji razlomak , logaritam ili parni koren to odradimo po

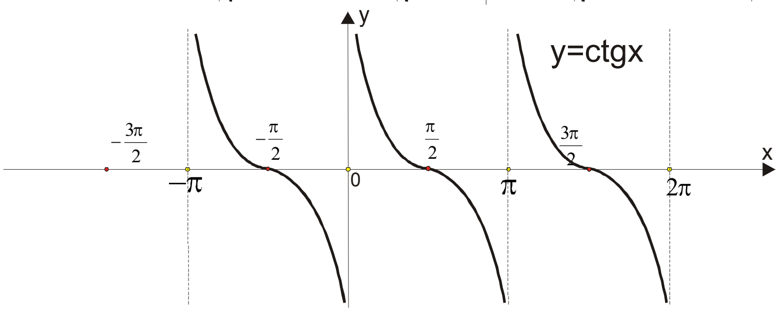
prethodnim stavkama....

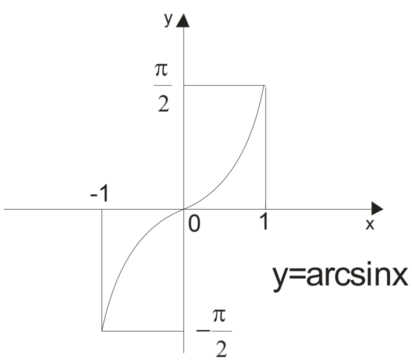
5. U slučaju da nam je zadata trigonometrijska funkcija , odlast definisanosti tražimo na osnovu elementarnih grafika:



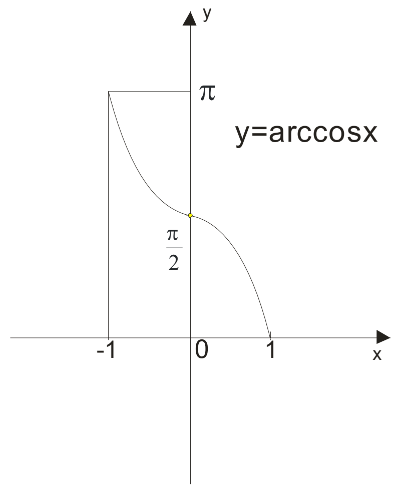




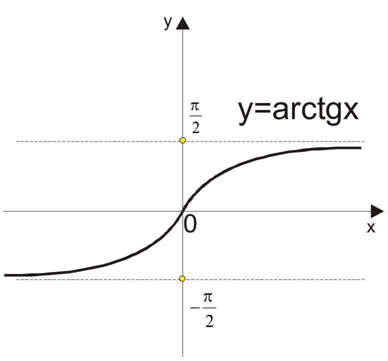




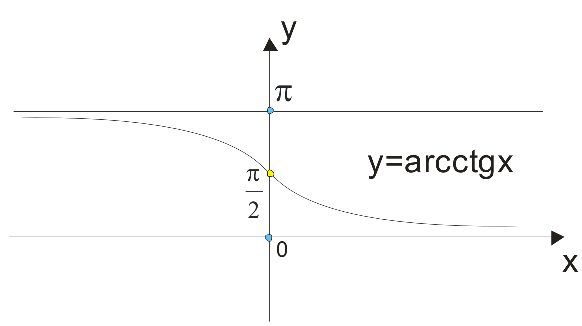
Funkcija je definisana za $x \in [-1,1]$



Funkcija je definisana za $x \in [-1,1]$



Funkcija je definisana na celom skupu R.



Funkcija je definisana na celom skupu R.

PRIMERI

1. Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

a) $y=\frac{x^2+3x}{x+4}$

b) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$

v) $y=\frac{2x^2-5}{x^2+1}$

Rešenje:

a) $y=\frac{x^2+3x}{x+4}$

Sve što je u imeniocu mora biti različito od 0 .

$x+4\neq 0$

$x\neq -4$

Oblast definisanosti je $D_f=(-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$ ili neki profesori vole da zapišu $x\in R\setminus\{-4\}$

Šta ovo konkretno znači?

Ovo znači da funkcija ima prekid u x = - 4 i da je tu potencijalna vertikalna asimptota!

b) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$

Sve što je u imeniocu mora biti različito od 0 .

Dakle $x^2-4\neq 0$.

Ovo možemo rešavati kao kvadratnu jednačinu sa $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a u ovoj situaciji možemo upotrebiti I razliku kvadrata.

$(x-2)(x+2)\neq 0\rightarrow x-2\neq 0\wedge x+2\neq 0\rightarrow \boxed{x\neq 2\wedge x\neq -2}$

Ako vam je lakše , vi prvo rešite ovo sa $(x-2)(x+2)=0$ pa na kraju precrtajte = , to jest $\neq$.

Odlast definisanosti ove funkcije je : $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

Ovo znači da funkcija ima prekide u x = -2 i x = 2 i da su tu potencijalne vertikalne asimptote.

v) $y=\dfrac{2x^2-5}{x^2+1}$

Sve što je u imeniocu mora biti različito od 0 .

Dakle: $x^2+1\neq 0$

Razmislimo malo....

Izraz $x^2+1>0$ pa nikad ne može biti nula! To nam govori da je ova funkcija definisana na celom skupu realnih brojeva I da nema vertikalnih asimptota. To jest $D_f=(-\infty,\infty)$.

2. **Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:**

a) $y=\log_2\dfrac{x-2}{x+1}$

b) $y=\dfrac{x}{\ln x}$

v) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

Rešenje:

a) $y=\log_2\dfrac{x-2}{x+1}$

Ovde imamo prvo razlomak, pa mora da je $x+1\neq 0\to x\neq -1$

Imamo i logaritamsku funkciju pa mora da je $\dfrac{x-2}{x+1}>0$.

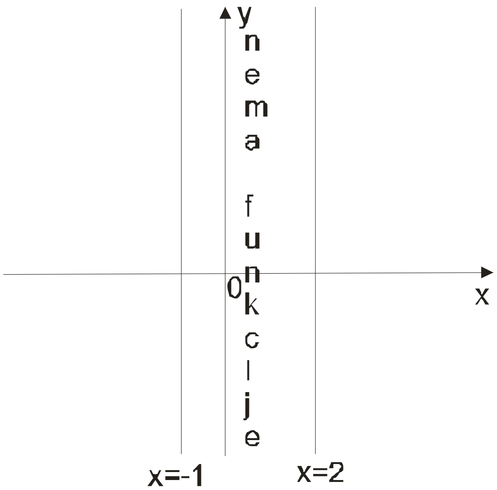
Ovu nejednačinu možemo rešavati na više načina ali mi preferiramo tablicu (pogledajte fajl iz II godine o nejednačinama)

$-\infty$ -1 2 ∞ ↔ brojevna prava

x+1	-	+	+
x-2	-	-	+
$\dfrac{x-2}{x+1}$	+	-	+

Oblast definisanosti je $D_f=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

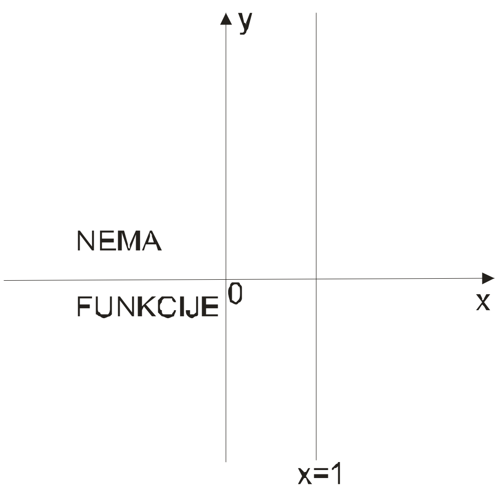
Ovo znači da je funkcija nema izmedju prava x = -1 i x = 2 , što bi na slici izgledalo:



b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Zbog razlomka mora da je $\ln x \neq 0 \rightarrow x \neq 1$, a zbog *ln* funkcije mora da je $x > 0$, to jest, oblast definisanosti je:

$D_f = (0,1) \cup (1, \infty)$ a na slici bi to izgledalo:



v) $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

Sve u imeniocu mora da je različito od nule:

$1 - \ln x \neq 0$

$\ln x \neq 1$

$x \neq e^1 \rightarrow x \neq e$

Kako imamo i *ln x* to mora biti $x > 0$ pa je oblast definisanosti : $D_f = (0,e) \cup (e, \infty)$

Grafik bi bio sličan kao u prethodnom primeru samo bi potencijalna vertikalna asimptota bila u $x = e$.

3. **Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:**

a) $y = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

b) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Rešenje:

a) $y = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

Imamo razlomak , pa je $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$, a kako je e^{-x} uvek definisano , onda je $D_f = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$

b) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Pazite ovde! Jeste da je funkcija e^x uvek definisana, ali kad u eksponentu ima razlomak on ne sme da bude 0.

Dakle: $x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$ pa je $D_f = (-\infty,2) \cup (2,\infty)$

4. **Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$

b) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

v) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$

g) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

Rešenje:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$

Najpre uočimo da postoji razlomak , pa mora biti $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

Dalje, pošto se radi o parnom korenu (kvadratni koran) sve unutar korena mora biti veće ili jednako 0.

$\dfrac{x^3}{x+1} \geq 0$, ovo je najbolje rešiti upotrebom tablice….

Dobijamo $x \in (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$, ali ovo nije oblast definisanosti , jer moramo uzeti u obzir da je $x \neq -1$, pa je onda:

$D_f = (-\infty,-1) \cup [0,\infty)$.

b) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

Imamo razlomak , pa je $\sqrt{x^2-4x+3} \neq 0$ a zbog korena mora biti $x^2-4x+3 \geq 0$.

Kad spakujemo ova dva uslova dobijemo $x^2-4x+3 > 0$.

Rešimo prvo ovu kvadratnu jednačinu: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to x_1 = 1 \wedge x_2 = 3$

Sad možemo kvadratnu napisati u onom drugom obliku proizvoda $a(x-x_1)(x-x_2) = (x-1)(x-3)$ pa da koristimo tablicu a može i brže (koristeći činjenicu da kvadratni trinom ima znak broja a svuda osim izmedju nula)

Oblast definisanosti je $D_f = (-\infty,1) \cup (3,\infty)$.

v) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$

Ovde nemamo razlomaka a već smo rekli da su neparni koreni svuda definisani (treći koren bilo kog realnog broja je realan broj) pa je oblast definisanosti ove funkcije $D_f = (-\infty,\infty)$.

g) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

Ovde nam najpre smeta razlomak : $\sqrt[3]{x^3-1} \neq 0$ a kako je treći koren uvek definisan, ostaje da je $x^3-1 \neq 0$.

Iskoristićemo formulu za razliku kubova:

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ pa je $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

Dalje razmišljamo : izraz $x^2+x+1 > 0$ jer je kod njega $a > 0 \wedge D < 0$ (pogledajte fajl kvadratna funkcija iz druge godine). Ostade samo da je $x-1 \neq 0 \to x \neq 1$ pa je oblast definisanosti: $D_f = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$

5. **Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:**

a) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

b) $y = arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6}$

Rešenje:

a) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

Iz elementarnog grafika arcsinx funkcije zaključujemo da ako imamo $\arcsin\Omega \to -1 \le \Omega \le 1$, što znači da sve iza arcsin mora biti izmedju -1 i 1. (slično je i za arccos x)

Za naš zadatak je dakle: $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$

E sad ovo možemo odmah raditi kao dve nejednačine pa onda upakovati rešenja na istoj brojevnoj pravoj.

U našoj situaciji ćemo sve pomnožiti sa $1+x^2$. Zašto to smemo ovde? Pazite, to smemo da uradimo samo ako je izraz u imeniocu pozitivan, a mi smo ovde sigurni da je $1+x^2 > 0$

$$-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \text{.............................} *\left(1+x^2\right)$$
$$-\left(1+x^2\right) \le 2x \le \left(1+x^2\right)$$
$$-1-x^2 \le 2x \le 1+x^2 \quad \text{sad razdvojimo na dve nejednakosti}$$
$$-1-x^2 \le 2x \wedge 2x \le 1+x^2$$
$$0 \le 1+x^2+2x \wedge 0 \le 1+x^2-2x$$
$$0 \le (x+1)^2 \wedge 0 \le (x-1)^2$$

Ovo očigledno uvek važi, za svako x iz skupa R, pa je $D_f = (-\infty,\infty)$.

b) $y = arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6}$

Videli smo na početku fajla da je funkcija arctgx definisana za svako x. Ovde nama smeta samo razlomak!

$x^2-5x+6 \ne 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $x_1 = 2 \wedge x_2 = 3$, pa je onda : $x^2-5x+6 \ne 0 \to x_1 \ne 2 \wedge x_2 \ne 3$

a oblast definisanosti je : $D_f = (-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$

6. **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $y=\log\frac{x^2-7x+12}{1-x}+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+e^{\frac{1}{x-3,5}}$

Rešenje:

Evo jednog zadatka u kome imamo kombinaciju više uslova…
Prvo ćemo da odradimo sve razlomke:

$1-x\neq 0\to\boxed{x\neq 1}$

$x+2\neq 0\to\boxed{x\neq -2}$

$x-3,5\neq 0\to\boxed{x\neq 3,5}$

Sad idemo redom, da najpre odradimo logaritam:

$$\frac{(x-3)(x-4)}{1-x}>0$$

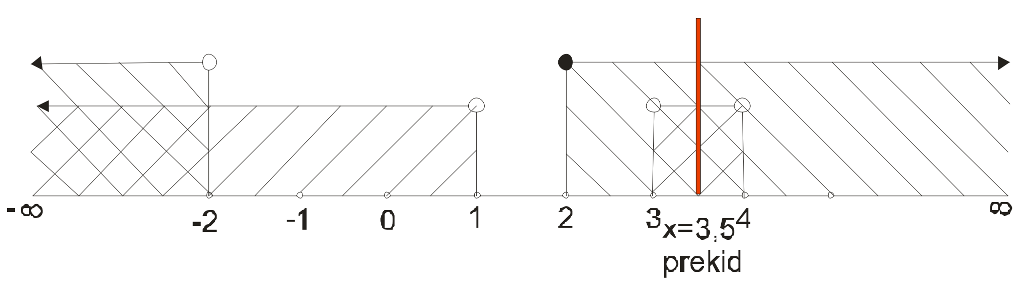
	-∞ 1	1 3	3 4	4 ∞
x-3	-	-	+	+
x-4	-	-	-	+
1-x	+	-	-	-
sve	+	-	+	-

Ovde je rešenje $x\in(-\infty,1)\cup(3,4)$

Sad uništimo koren: $\frac{x-2}{x+2}\geq 0$

	-∞ -2	-2 2	2 ∞
x-2	-	-	+
x+2	-	+	+
sve	+	-	+

Ovde je rešenje: $x\in(-\infty,-2)\cup[2,\infty)$ s obzirom da smo veš rekli da je $x\neq -2$.
Sad sve upakujemo na jednoj brojevnoj pravoj:



$D_f=(-\infty,-2)\cup(3;3,5)\cup(3,5;4)$ je tražena oblast definisanosti!