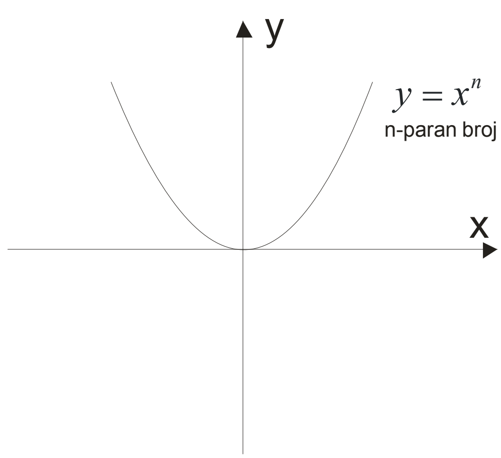
ELEMENTARNE FUNKCIJE – GRAFICI

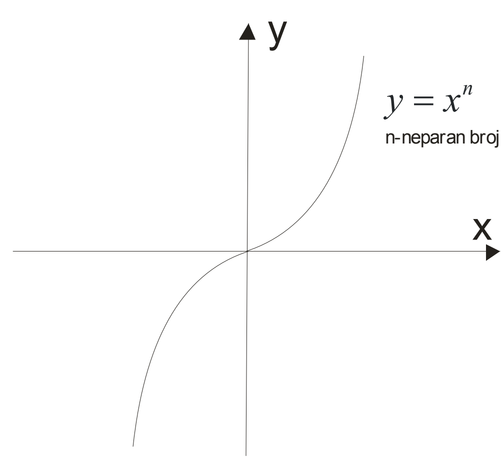
Osnovne elementarne funkcije su :

- Konstantne funkcije
- Stepene funkcije
- Eksponencijalne funkcije
- Logaritamske funkcije
- Trigonometrijske funkcije
- Inverzne trigonometrijske funkcije
- Hiperboličke funkcije

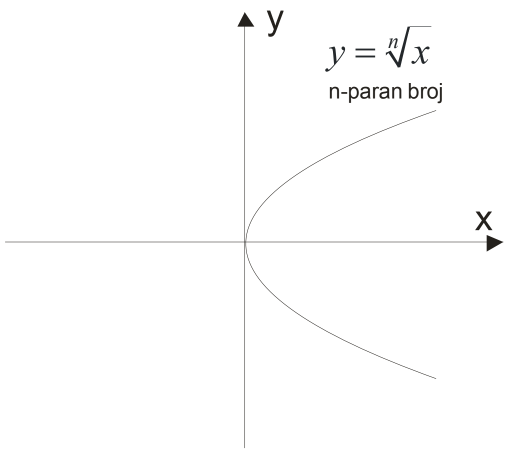
Elementarnim funkcijama se nazivaju funkcije koje se mogu zadati pomoću osnovnih elementarnih funkcija i konstanti , pomoću konačno mnogo operacija sabiranja , oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicija osnovnih elementarnih funkcija.

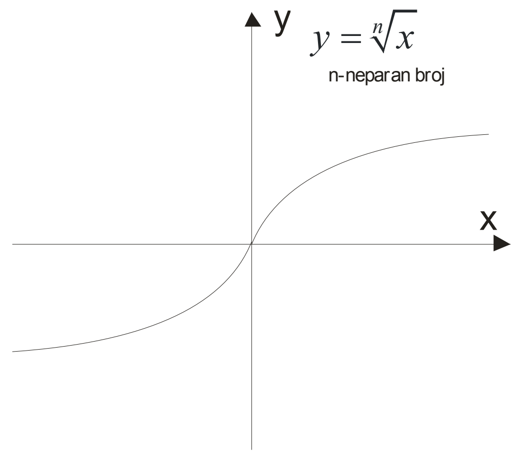
Napomena: Ovo nije stroga definicija elementarnih funkcija. Vi tu definiciju naučite kako vam je kaže vaš profesor, mi smo tu da samo malo pojasnimo stvari i podsetimo vas kako izgledaju grafici...





Ovo su grafici stepenih funkcija gde je **izložilac prirodni broj** . Svi grafici izgledaju ovako, sem što se u zavisnosti od izložioca sužavaju ili šire…(pogledajte fajl kvadratna funkcija iz druge godine).

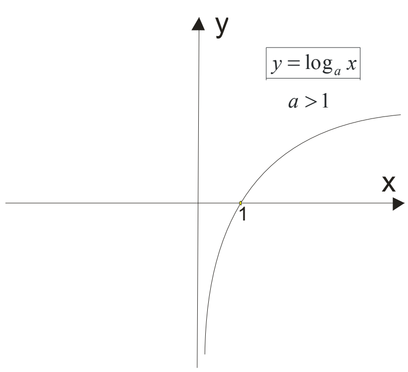




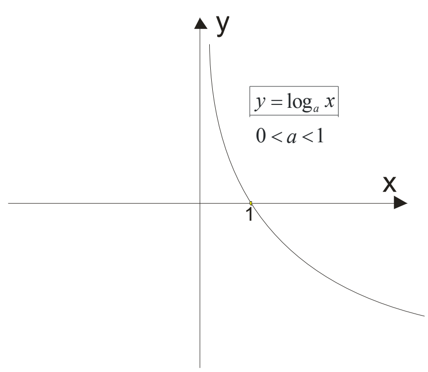
Ovo su grafici stepenih funkcija gde je **izložilac racionalan broj.**

Trebamo zapamtiti da je $y=\sqrt[n]{x}$, kada je n **paran broj** definisana samo za $x\in[0,\infty)$ to jest $x\geq 0$, dok je funkcija

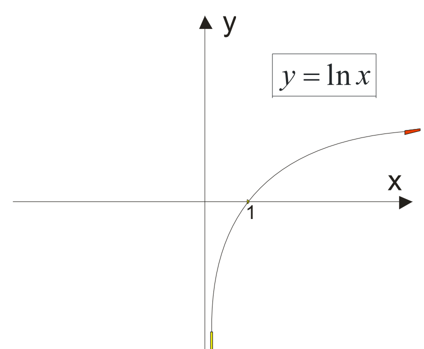
$y=\sqrt[n]{x}$ kada je n **neparan broj** definisana na celom skupu R, to jest $x\in(-\infty,\infty)$



slika 1



slika 2



slika 3

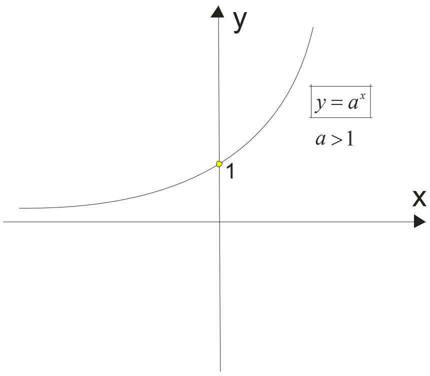
Podsetite se logaritamskih funkcija (fajl iz II godine).

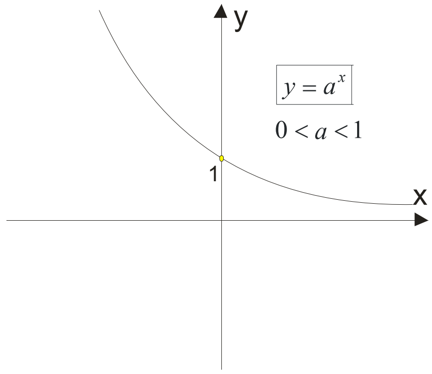
Važno je zapamtiti da su one definisane za vrednosti x koje su veće od nule , to jest $x>0$.

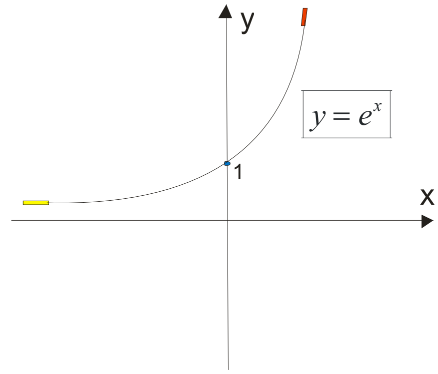
U graničnim vrednostima funkcija smo rekli da je $\ln 0=-\infty$. Sa elementarnog grafika to sad možemo i uočiti

(slika 3.): kad se x približava 0 sa pozitivne strane funkcija teži beskonačnosti (minus): $\lim\limits_{x\to 0+\varepsilon}\ln x=-\infty$ (žuta crta)

A rekli smo i da je $\ln\infty=\infty$. Sa grafika je i to jasno, kad x teži beskonačnosti i funkcija ide u beskonačno, što je na grafiku prikazano crvenom crtom.







Eksponencijalne funkcije smo takodje obradjivali u II godini. Važno je da su one svuda definisane: $\forall x \in R$.

Kad smo objašnjavali limese, rekli smo da je $e^{-\infty} = 0$. Sada to možemo videti i na grafiku(žuta crta), kad x teži minus beskonačno, funkcija se približava nuli. Dalje smo rekli i da je $e^{\infty} = \infty$ (crvena crta).

Trigonometrijske funkcije:

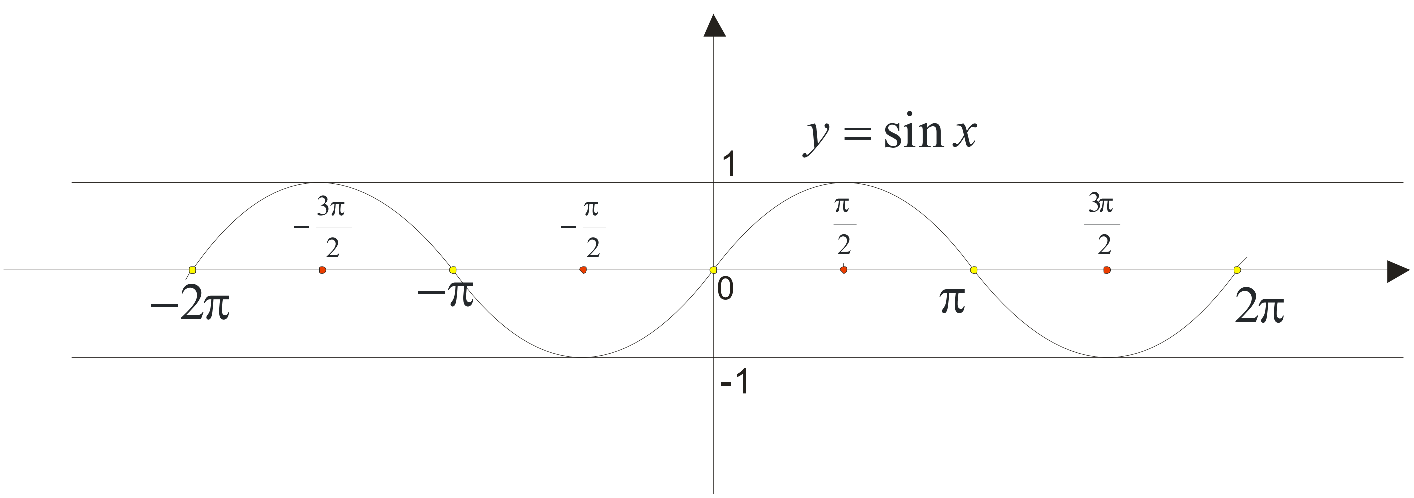
y = sinx

$y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$

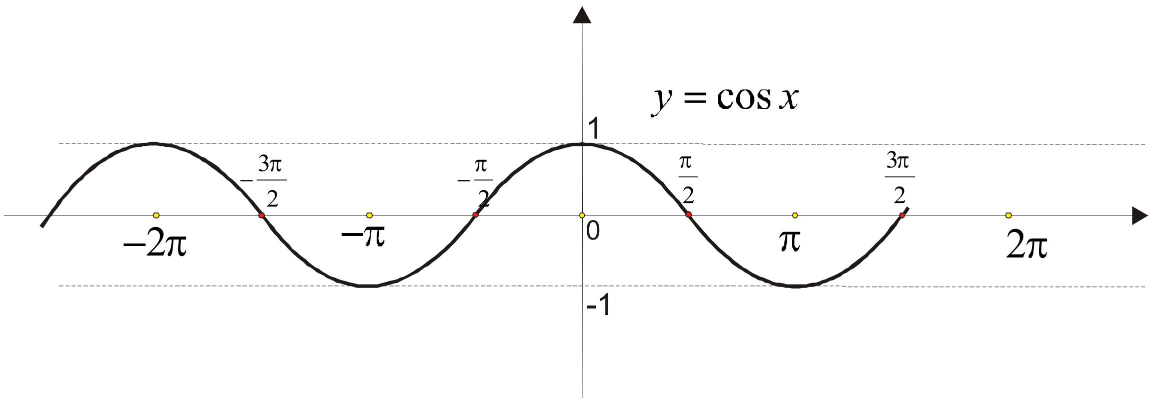
$y = ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$

Sinusna funkcija **y = sinx** je osnovna trigonometrijska funkcija.

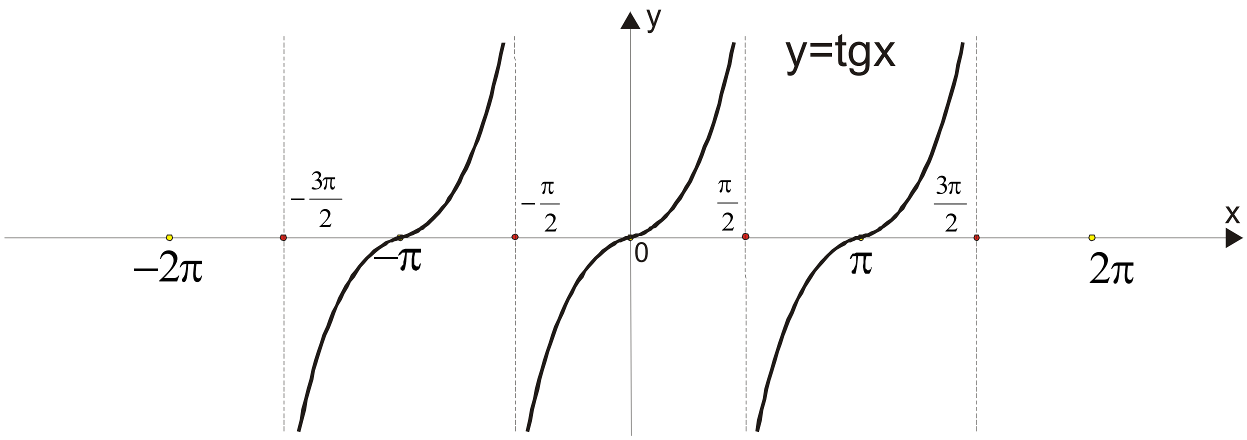


Ostale trigonometrijske funkcije definišemo sa :

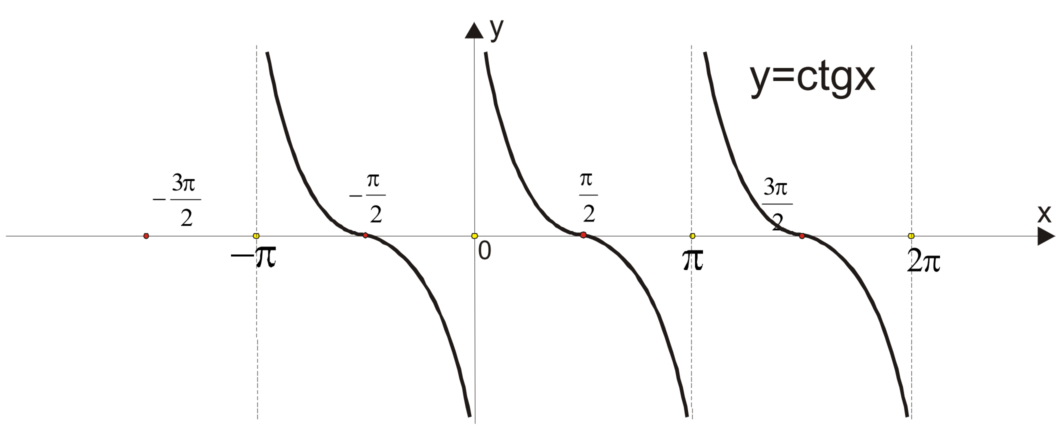
$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$



$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$



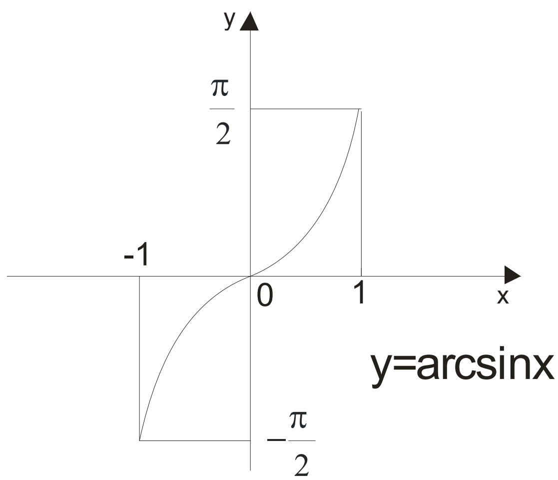
Inverzne trigonometrijske funkcije:

Ove funkcije se nazivaju **ciklometrijske** ili **arkus** funkcije.

i) Arkus sinus

Pazite: funkcija y = sinx nema inverznu funkciju, jer nije bijekcija!

Ali ako posmatramo njenu restrikciju na intervalu $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ i preslikavanje $f^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dobijamo arkus sinus funkciju:



Još zapamtite da važi:

$\arcsin(\sin x)=x$ za $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\sin(\arcsin x)=x$ za $x\in[-1,1]$

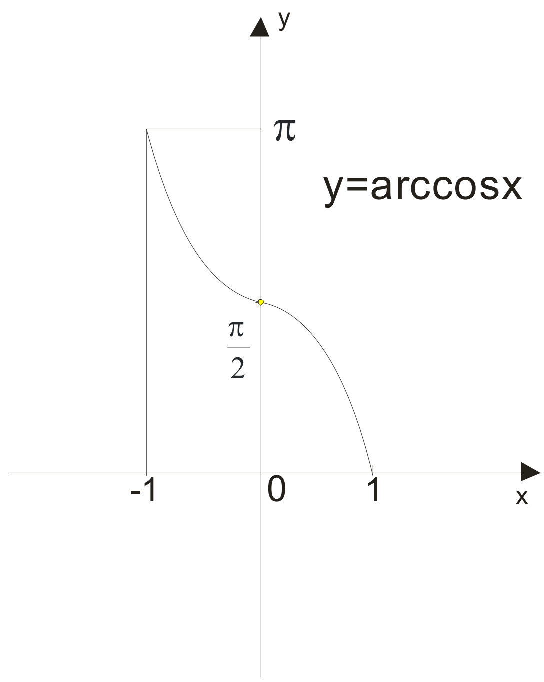
Funkcija je definisana za $x\in[-1,1]$

Nula funkcije je u x = 0

ii) Arkus kosinus

I ovde ćemo iz sličnog razloga posmatrati restrikciju funkcije **y = cos x** na intervalu $[0,\pi]$.

Posmatramo preslikavanje $g^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$



Važi:

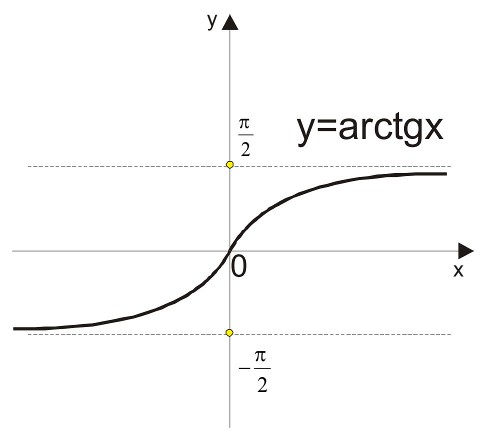
$$\arccos(\cos x)=x \quad \text{za} \quad x\in[0,\pi]$$
$$\cos(\arccos x)=x \quad \text{za} \quad x\in[-1,1]$$

Funkcija je definisana za $x\in[-1,1]$

Nula funkcije je u x =1

iii) Arkus tangens

Posmatrajući restrikciju funkcije y = tgx na intervalu $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ i preslikavanje $h^{-1}:R\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
Dobijamo funkciju arkus tangens.



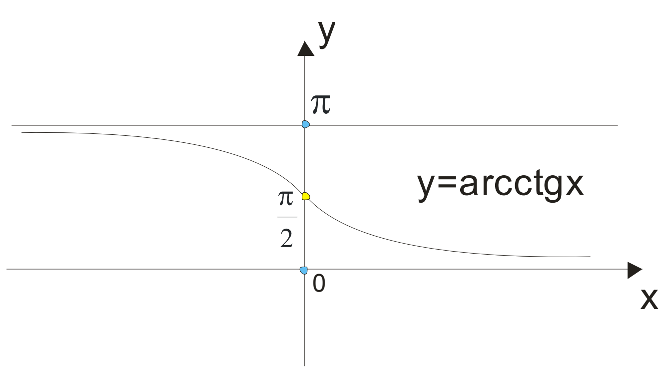
$arctg(tgx)=x$ za $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$tg(arctgx)=x$ za $x\in R$

Funkcija je definisana na celom skupu R.

Nula funkcije je x=0.

iv) Arkus kotangens

$k^{-1}:R\rightarrow[0,\pi]$



$arcctg(ctgx)=x$ za $x\in[0,\pi]$
$ctg(arcctgx)=x$ za $x\in R$

Funkcija je svuda definisana . Nema nule.

Hiperboličke funkcije

To su funkcije :

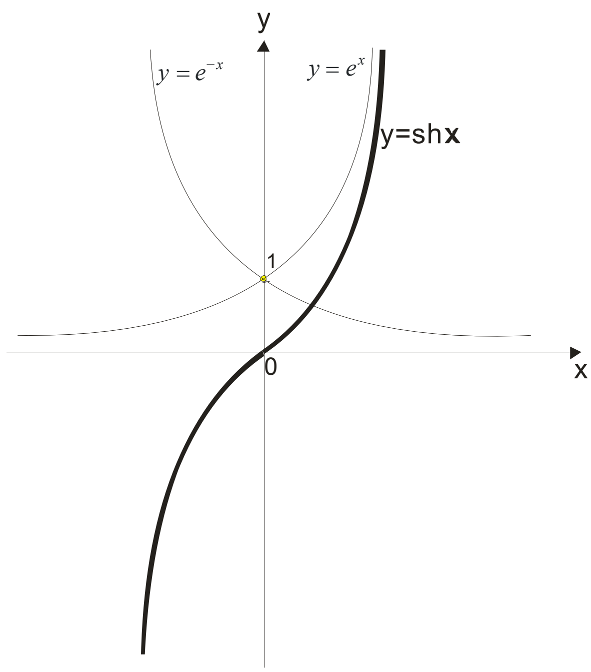
hiperbolički sinus $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

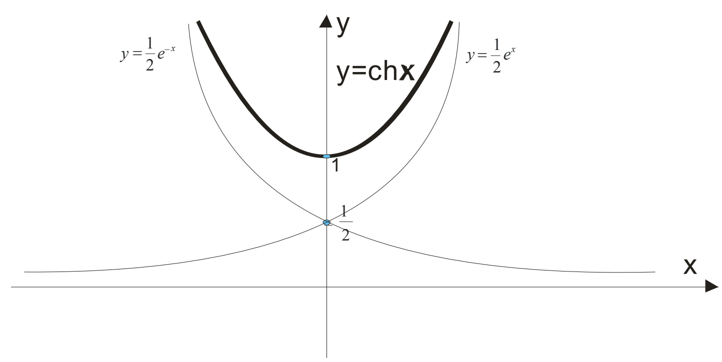
hiperbolički kosinus $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

hiperbolički tangens $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ i

hiperbolički kotangens $cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Grafici ovih funkcija se dobijaju iz grafika $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ **odnosno pomoću** $y = \frac{1}{2}e^x$ i $y = \frac{1}{2}e^{-x}$





Ovde važe identiteti (podseti se adicionih formula iz II godine…)

$$ch^2x - sh^2x = 1$$
$$sh(x+y) = shx \cdot chy + chx \cdot shy$$
$$ch(x+y) = chx \cdot chy + shx \cdot shy$$
$$sh2x = 2 \cdot shx \cdot chx$$
$$ch2x = ch^2x + sh^2x$$

hiperbolički tangens i hiperbolički kotangens imaju grafike: