IZVODI ZADACI (II deo)

U ovom delu ćemo pokušati da vam objasnimo traženje izvoda složenih funkcija.

Prvo da razjasnimo koja je funkcija složena? Pa, najprostije rečeno, to je svaka funkcija koje nema u tablici (tamo su samo elementarne funkcije) i čiji izvod se ne može naći primenom datih pravila.

Evo par primera:

Primer 1.

Nađi izvod funkcije $y = (1+5x)^{12}$

Kako da razmišljamo?

Da je data funkcija $y = x^{12}$, njen izvod bi bio $y` = 12\, x^{11}$, i to ne bi bio problem. Ali mi umesto x-sa imamo 1+5x i to nam govori da je funkcija složena! Radimo isto kao za elementarnu funkciju, i dodamo izvod od onog što je složeno! Dakle: $y = (1+5x)^{12}$

$$y` = 12(1+5x)^{11}\mathbf{(1+5x)`}$$ [od jedinice je izvod 0, a od 5x je izvod 5]

$$y` = 12\,(1+5x)^{11} * 5$$

$$\mathbf{y` = 60\,(1+5x)^{11}}$$

Primer 2.

$$y = \sqrt{\sin x}$$

Podsetimo se : ako je $y = \sqrt{x}$ izvod je $y` = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ali pošto unutar korena imamo sinx, funkcija je složena!

$$y = \sqrt{\sin x}$$

$$y` = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\mathbf{(\sin x)`}$$

$$y` = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x$$

Primer 3.

Nađi izvod funkcije $y = e^{x^2+2x-3}$

Znamo da je $(e^x)` = e^x$. A pošto umesto x-sa imamo izraz $x^2 + 2x - 3$, to se znači radi o složenoj funkciji.

$$y = e^{x^2+2x-3}$$

$$y` = e^{x^2+2x-3}(x^2+2x-3)`$$

$$y` = e^{x^2+2x-3}(2x+2)$$

Primer 4.

Nađi izvod funkcije $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$

Od $\ln x$ funkcije izvod je $\frac{1}{x}$, ali ovde je umesto x- sa izraz $\frac{1+x}{1-x}$ pa radimo kao složenu funkciju! Dakle:

$$y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$y` = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)`$$ ovde pazimo, jer je $(\frac{1+x}{1-x})`$ izvod količnika!

$$y` = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\frac{(1+x)`(1-x)-(1-x)`(1+x)}{(1-x)^2}$$ skratimo po 1-x

$$y` = \frac{1}{1+x}\frac{1-x+1+x}{1-x}$$

$$y` = \frac{1}{1+x}\frac{2}{1-x}$$ u imeniocu je razlika kvadrata…

$$y` = \frac{2}{1-x^2}$$ konačno rešenje!

ZNAČI: Radimo sve isto kao da je elementarna funkcija i pomnožimo sve sa izvodom od onog što je složeno!

Ako nismo ovo baš razumeli evo tablice izvoda složene funkcije, $y = f(u)$ a $u = g(x)$ pa je $y` = f`(u)\, g`(x)$

1. $(u^2)` = 2u\, u`$
2. $(u^n)` = nu^{n-1} u`$

---

3. $(a^u)` = a^u \ln a\, u`$
4. $(e^u)` = e^u u`$
5. $(\log_a u)` = \frac{1}{u \ln a} u`$
6. $(\ln u)` = \frac{1}{u} u`$
7. $\left(\frac{1}{u}\right)` = -\frac{1}{u^2} u`$
8. $\sqrt{u}` = \frac{1}{2\sqrt{u}} u`$

---

9. $(\sin u)` = \cos u\, u`$
10. $(\cos u)` = -\sin u\, u`$
11. $(\mathrm{tg}\, u)` = \frac{1}{\cos^2 u} u`$
12. $(\mathrm{ctg}\, u)` = -\frac{1}{\sin^2 u} u`$

---

13. $(\arcsin u)` = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u`$
14. $(\arccos u)` = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u`$
15. $(\mathrm{arctg}\, u)` = \frac{1}{1+u^2} u`$
16. $(\mathrm{arcctg}\, u)` = -\frac{1}{1+u^2} u`$

ZADACI:

1. **Nađi izvod funkcije** a) $y = \sin^5 x$

b) $y = \sin 5x$

Rešenje:

Ovde moramo voditi računa , $\sin^5 x$ ćemo raditi kao drugi tablični , jer važi $\sin^5 x = (\sin x)^5$ dok ćemo $\sin 5x$ raditi kao deveti tablični, to jest kao sin u, gde je u = 5x

a) $y = \sin^5 x$

$y` = 5\sin^4 x(\sin x)`$

$y` = 5\sin^4 x \cos x$

b) $y = \sin 5x$

$y` = \cos 5x(5x)`$

$y` = \cos 5x\ 5 = 5\cos 5x$

2. **Nađi izvod funkcije** $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

Rešenje: Ovde imamo višestruko složenu funkciju...**Najpre idemo izvod ln u, gde je u =** $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)`$$

sada radimo izvod $\sqrt{u}` = \frac{1}{2\sqrt{u}}u`$ **gde je u =** $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)`$$

pazi : $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ **je izvod količnika**

$$y` = \frac{1}{2\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\frac{(1-\sin x)`(1+\sin x)-(1+\sin x)`(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$y` = \frac{1}{2\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$y` = \frac{1}{2\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \frac{-\cos x - \cos x \sin x - \cos x + \cos x \sin x}{(1+\sin x)^2}$$

$$y` = \frac{1}{2\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$$ **pokratimo šta može...**

$$y` = \frac{-\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$ **u imeniocu je razlika kvadrata**

$$y` = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x}$$ **znamo da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$**

$$y` = \frac{-\cos x}{\cos^2 x}$$ **skratimo cos x**

$$y` = \frac{-1}{\cos\ x}$$ **konačno rešenje!**

3. Nađi izvod funkcije **y = arc tg** $\frac{1+x}{1-x}$

Rešenje: Kako razmišljamo?

Moramo raditi kao $(\text{arctgu})` = \frac{1}{1+u^2} u`$ gde je $u = \frac{1+x}{1-x}$

y = arc tg $\frac{1+x}{1-x}$

$$y` = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)`$$ **pazi : $\frac{1+x}{1-x}$ je izvod količnika i odmah ostalo'sredjujemo'**

$$y` = \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \frac{(1+x)`(1-x)-(1-x)`(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y` = \frac{1}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}} \frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2}$$ **pokratimo (1-x)^2**

$$y` = \frac{1}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} \frac{1-x+1+x}{1}$$ **sredimo malo...**

$$y` = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)}$$ **Dakle , konačno rešenje je:** **y`=** $\frac{1}{(1+x^2)}$

4. Nađi izvod funkcije **y = arcsin** $\frac{2x}{1+x^2}$

Rešenje: Radimo po formuli (arcsinu)`= $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u`$ gde je u = $\frac{2x}{1+x^2}$

y = arcsin $\frac{2x}{1+x^2}$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}(\frac{2x}{1+x^2})`$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2)-2x2x}{(1+x^2)^2}$$ **sredjujemo dalje izraz pod korenom...**

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{(1+x^2)^2}}}\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$y` = \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ **pokratimo... i dobijamo konačno rešenje** $y` = \frac{2}{1+x^2}$

Podsetimo se teorijskog dela iz izvoda višeg reda...

Izvodi višeg reda

y``= (y`)` $\longrightarrow$ drugi izvod je prvi izvod prvog izvoda

y```=(y``)` $\longrightarrow$ treći izvod je prvi izvod drugog izvoda

-.-

$y^{(n)} = (y^{n-1})`$ $\longrightarrow$ n-ti izvod je prvi izvod (n-1)-vog izvoda

Znači da ovde praktično nema ničeg novog, jer mi ustvari uvek tražimo prvi izvod i naravno moramo da idemo redom , prvi izvod, pa drugi, pa treći itd...

Evo nekoliko primera:

Primer 1.

Odredi drugi izvod sledećih funkcija :

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$

b) $y = e^{-x^2}$

v) $y = \frac{1+x}{1-x}$

Rešenja:

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$

y` = 6x – 4

y``= 6

b) $y = e^{-x^2}$ **Pazi , ovo je složena funkcija...**

$y` = e^{-x^2}(-x^2)` =$ e^{-x^2} (-2x) = -2x e^{-x^2} **evo ga prvi izvod , sad radimo kao izvod proizvoda, a konstanta –2 ostaje ispred…**

y``= -2[x` $e^{-x^2}$ **+(** $e^{-x^2}$ **)`**x]

y``= -2[ $e^{-x^2}$ **+(**-2x $e^{-x^2}$ **)x**] pa je y``=-2[e^{-x^2} -2 x^2 e^{-x^2}]

y``= -2 e^{-x^2} **[1-2** x^2 **]** **evo drugog izvoda**

v) $y = \frac{1+x}{1-x}$ **Najpre radimo kao izvod količnika...**

$$y` = \frac{(1+x)`(1-x)-(1-x)`(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y` = \frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y` = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$y` = \frac{2}{(1-x)^2}$ **sada tražimo drugi izvod, ali radi lakšeg rada ćemo napisati** $\frac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2}$ **i ovo dalje radimo kao složenu funkciju…**

$$y` = 2(1-x)^{-2}$$

$$y`` = 2(-2)(1-x)^{-2-1} \cdot (1-x)`$$

$$y`` = -4(1-x)^{-3} \cdot (-1)$$

$$\boxed{y`` = \frac{4}{(1-x)^3}}$$

Primer 2.

Data je funkcija $f(x)= e^x \sin x$.

Dokazati da je tačna jednakost: $f``(x) – 2f`(x) + 2f(x) = 0$

Rešenje:

Mi dakle moramo naći prvi i drugi izvod funkcije $f(x)= e^x \sin x$ i to treba da zamenimo u datoj jednakosti!

$f(x)= e^x \sin x$

$f`(x) = (e^x)` \sin x + (\sin x)` e^x$

$f`(x) = e^x \sin x + \cos x\, e^x$ Našli smo prvi izvod, sad tražimo drugi...

$f``(x) = (e^x \sin x)` + (\cos x\, e^x)`$

$f``(x) = (e^x)` \sin x + (\sin x)` e^x + (\cos x)` e^x + (e^x)` \cos x$

$f``(x) = e^x \sin x + \cos x\, e^x - \sin x\, e^x + e^x \cos x$

$f``(x) = 2e^x \cos x$

Sada se vraćamo u početnu jednakost:

$f``(x) – 2f`(x) + 2f(x) =$ zamenimo…

$2e^x \cos x – 2 (e^x \sin x + \cos x\, e^x) + 2 e^x \sin x =$

$2e^x \cos x – 2 e^x \sin x -2 \cos x\, e^x + 2 e^x \sin x =$ sve se potire**...=0**

Time smo dokazali da je zaista $f``(x) – 2f`(x) + 2f(x) = 0$

Primer 3.

Nadji n- ti izvod funkcije:

a) $y = e^{-2x}$

b) $y = \sin x$

Rešenje:

a) $y = e^{-2x}$ Pazi, izvod složene funkcije...

$y` = e^{-2x}(-2x)` = -2\, e^{-2x}$

$y`` = -2\,(-2\, e^{-2x}) = 4\; e^{-2x}$

$y``` = 4\,(-2\, e^{-2x}) = -8\, e^{-2x}$

$y^{iv} = -8(-2\, e^{-2x}) = 16\, e^{-2x}$

………………………..

Pitamo se kako će izgledati n-ti izvod ?

Tu već nastaju mali problemi. Iz nekoliko prvih izvoda, najčešće 5,6 njih mi trebamo naći n-ti izvod.

Probamo da uočimo kako se ponašaju odredjeni članovi u izvodima.

Recimo, kod ovog primera se e^{-2x} javlja u svim izvodima, a ove brojke ćemo malo prepraviti…

$y` = -2\, e^{-2x} = (-2)^1\, e^{-2x}$

$y`` = 4\; e^{-2x} = (-2)^2\, e^{-2x}$

$y``` = -8\, e^{-2x} = (-2)^3\, e^{-2x}$

$y^{iv} = 16\, e^{-2x} = (-2)^4\, e^{-2x}$

Vidimo da (-2) ima onaj stepen koji je izvod u pitanju!

Iz ovoga zaključujemo da će n-ti izvod biti : $y^{(n)} = (-2)^n\, e^{-2x}$

Međutim, ovde posao nije gotov. Neki profesori zahtevaju da se ova formula dokaže i primenom matematičke indukcije. I u pravu su!

Proučite Matematičku indukciju (naravno na sajtu) i probajte da radi vežbe uradite ovaj dokaz.

b) y = sinx

$y` = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ **veza u prvom kvadrantu (pogledaj temu II godina prebacivanje u I kvadrant)**

$y`` = -\sin x = \sin(x+2\frac{\pi}{2})$

$y``` = -\cos x = \sin(x+3\frac{\pi}{2})$

$y^{(4)} = \sin x = \sin(x+4\frac{\pi}{2})$ **itd.**

…………………………………..

Vidimo da svaki izvod možemo izraziti preko sinusa i još primećujemo da koji je izvod u pitanju taj je broj uz $\frac{\pi}{2}$. **Dakle n-ti izvod je** $y^{(n)} = \sin(x+n\frac{\pi}{2})$

I ovo naravno treba dokazati indukcijom!

NAPOMENA:

Ako funkcije u=u(x) i v=v(x) imaju u tački x_0 izvode do reda n, tada njihova linearna kombinacija au + bv , gde a i b pripadaju skupu R i njihov proizvod $u \circ v$ imaju takodje izvode do reda n u tački x_0 i pri tome važi:

1. $(au+bv)^{(n)} = a\,u^{(n)} + b\,v^{(n)}$

2. $(u \circ v)^{(n)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v` + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v`` + ... + \binom{n}{n-1}u`v^{(n-1)} + \binom{n}{n}uv^{(n)}$

Ova druga formula je poznata i kao Lajbnicova formula!