Tablica izvoda

1. C' =0
2. x`=1
3. (x^2)`=2x
4. (x^n)`=nx^{n-1}

----

5. (a^x)`=a^xlna
6. (e^x)`=e^x
7. $(\log_a x)$`=$\frac{1}{x\ln a}$ (ovde je x >0 i a >0)
8. (lnx)`=$\frac{1}{x}$ (x>0)
9. $\left(\frac{1}{x}\right)^{`}=-\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
10. $\sqrt{x}$`=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (x>0)

----

11. (sinx)`=cosx
12. (cosx)`= - sinx
13. (tgx)`=$\frac{1}{\cos^2 x}$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
14. (ctgx)`=$-\frac{1}{\sin^2 x}$ $x \neq k\pi$

----

15. (arcsinx)`=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $|x|<1$
16. (arccosx)`= - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. (arctgx)`= $\frac{1}{1+x^2}$
18. (arcctgx)`= - $\frac{1}{1+x^2}$

1. **[cf(x)]`=cf `(x)** Kad je konstanta vezana za funkciju, nju prepišemo a tražimo izvod samo od funkcije. A kad je konstanta sama, izvod od nje je 0.

2. **[f(x)$\pm$ g(x)]` = f `(x) $\pm$ g`(x)** Od svakog sabirka tražimo izvod posebno.

3. **(u$\circ$v)`=u`v+v`u** **izvod proizvoda**

4. $\left(\frac{u}{v}\right)^{`}=\frac{u`v-v`u}{v^2}$ **izvod količnika**

Primer 1. Nadji izvode sledećih funkcija:

a) $y = x^5$
b) $y = 10^x$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $y = \log_3 x$
e) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$
f) $f(x) = \frac{1}{x^7}$
g) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$
h) $y = x\sqrt{x}$
i) $y = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Rešenje:

a) $y = x^5 \Rightarrow y` = 5x^4$ kao 4-ti tablični

b) $y = 10^x \Rightarrow y` = 10^x \ln 10$ kao 5-ti tablični

c) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ kao 10-ti tablični

d) $y = \log_3 x$ pa je $y` = \frac{1}{x\ln 3}$ kao 7-mi tablični

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ Pazi: Ovde funkciju moramo prvo "pripremiti" za izvod. Iskoristićemo pravilo vezano za stepenovanje: $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Dakle $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$ pa dalje radimo kao $(x^n)` = nx^{n-1}$

$$f`(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

f) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ I ovde moramo "pripremiti" funkciju. Kako je $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ to je $\frac{1}{x^7} = x^{-7}$ pa je izvod $f`(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$

g) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$ ovde je $y = x^{-\frac{5}{8}}$ pa će izvod biti $y` = -\frac{5}{8}x^{-\frac{5}{8}-1} = -\frac{5}{8}x^{-\frac{13}{8}} = -\frac{5}{8\sqrt[8]{x^{13}}}$

h) $y = x\sqrt{x} = x^1 x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ pa je $y` = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

i) $y = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2 x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{11}{6}}$ pa će izvod biti $y` = \frac{11}{6}x^{\frac{11}{6}-1} = \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}} = \frac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}$

2. Nađi izvode sledećih funkcija:

a) $y = 5 \sin x$
b) $y = \frac{1}{2} \ln x$
c) $y = \frac{-\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} x$
d) $y = \pi x^3$
e) $f(x) = \frac{4}{5} \operatorname{arctg} x$
f) $f(x) = - a \operatorname{ctg} x$
g) $y = 10$
h) $y = -2abx$

Rešenje:

a) $y = 5 \sin x$ 5 je konstanta, pa nju prepišemo i tražimo izvod od sinx, a to je cosx. Dakle:

$y` = 5 \cos x$

b) $y = \frac{1}{2} \ln x$ $\frac{1}{2}$ je konstanta..... $y` = \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$

c) $y = \frac{-\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} x$ konstanta ostaje a od tgx je izvod 13. tablični, pa je $y` = \frac{-\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\cos^2 x}$

d) $y = \pi x^3$ Pazi : π je takodje konstanta, a od x^3 izvod je $3x^2$, pa je dakle:

$y` = \pi 3x^2$

e) $f(x) = \frac{4}{5} \operatorname{arctg} x$ $f`(x) = \frac{4}{5}\frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5(1+x^2)}$ kao 17. tablični

f) $f(x) = - a \operatorname{ctg} x$ $f`(x) = -a\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{a}{\sin^2 x}$ Pazi: a je konstanta

g) $y = 10$ Pazi: kad je konstanta sama izvod od nje je 0. Dakle $y`=0$

h) $y = -2abx$ Ovde je $-2ab$ konstanta, a kako je od x izvod 1 to je : $y` = -2ab$

3. Nađi izvode:

a) $y = 5x^6 - 3x^5 + 4x - 8$

b) $f(x) = 3\sin x - \frac{1}{2}e^x + 7\text{arctg}x - 5$

c) $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4$

Rešenje:

a) $y = 5x^6 - 3x^5 + 4x - 8$ Iskoristićemo pravilo **$[f(x) \pm g(x)]` = f`(x) \pm g`(x)$** i od svakog člana tražiti izvod posebno, naravno prepisujući konstantu ispred funkcije.

$y` = 5(x^6)` - 3(x^5)` + 4(x)` - 8`$

$y` = 30x^5 - 15x^4 + 4 - 0$ **Pazi još jednom, kad je konstanta sama izvod je 0.**

$y` = 30x^5 - 15x^4 + 4$

b) $f(x) = 3\sin x - \frac{1}{2}e^x + 7\text{arctg}x - 5$

$f`(x) = 3(\sin x)` - \frac{1}{2}(e^x)` + 7(\text{arctg}x)` - 5`$

$f`(x) = 3\cos x - \frac{1}{2}e^x + 7\frac{1}{1+x^2} - 0 = 3\cos x - \frac{1}{2}e^x + \frac{7}{1+x^2}$

c) $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4$ Najpre ćemo koristeći već pomenuta pravila za stepenovanje i korenovanje, “pripremiti” funkciju, a zatim tražiti izvode u tablici...

$y = x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-3} + 4$

$y` = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + 3(-2)x^{-3} - \frac{1}{5}(-3)x^{-4} + 0 = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} - 6x^{-3} + \frac{3}{5}x^{-4}$

4. Nađi izvode sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^3 \sin x$

b) $f(x) = e^x \arcsin x$

c) $y = (3x^2+1)(2x^2+3)$

d) $y = x - \sin x \cos x$

Rešenje: Kao što primećujete, u ovom zadatku moramo koristiti pravilo za izvod proizvoda: $\mathbf{(u \circ v)` = u`v + v`u}$

a) $f(x) = x^3 \sin x$ Ovde je x^3 kao funkcija u, dok je sinx kao funkcija v

$f`(x) = (x^3)` \sin x + (\sin x)` x^3$

$f`(x) = 3x^2 \sin x + \cos x \, x^3 = x^2(3\sin x + x\cos x)$

b) $f(x) = e^x \arcsin x$ Ovde je e^x kao funkcija u, dok je arcsinx kao funkcija v

$f`(x) = (e^x)` \arcsin x + (\arcsin x)` e^x$

$$f`(x) = e^x \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^x = e^x\left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

c) $y = (3x^2+1)(2x^2+3)$ Naravno ovde možemo sve pomnožiti pa tražiti izvod od svakog posebno, ali malo je lakše upotrebiti izvod proizvoda.

$y` = (3x^2+1)`(2x^2+3) + (3x^2+1)(2x^2+3)` = 6x\,(2x^2+3) + 4x\,(3x^2+1) = 2x[(6x^2+9) + (6x^2+2)] = 2x[12x^2+11]$

d) $y = x - \sin x \cos x$ **Od x je izvod 1 a sinxcosx moramo kao izvod proizvoda**

$y` = 1 - [ (\sin x)` \cos x + (\cos x)` \sin x]$

$y` = 1 - [\cos x \cos x - \sin x \sin x]$ Znamo da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$y` = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x$

5. Nađi izvode sledećih funkcija:

a) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

c) $y = \frac{5-e^x}{e^x+2}$

d) $y = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$

Rešenje: Ovde ćemo koristiti izvod količnika : $\left(\frac{u}{v}\right)` = \frac{u`v - v`u}{v^2}$

a) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ovde je $x^2 + 1$ funkcija u, dok je x^2-1 funkcija v

$y` = \frac{(x^2+1)`(x^2-1)-(x^2-1)`(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ **savet : imenilac nek ostane ovako do kraja!**

$y` = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ izvuci zajednički ispred zagrade ako ima, biće lakše za rad!

$y` = \frac{2x[(x^2-1)-(x^2+1)]}{(x^2-1)^2}$ malo prisredimo...

$y` = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ **evo konačnog rešenja!**

b) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ u je cosx ; a v je 1 - sinx

$y` = \frac{(\cos x)`(1-\sin x)-(1-\sin x)`\cos x}{(1-\sin x)^2}$ nadjemo izvode u brojiocu...

$y` = \frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos x \cos x}{(1-\sin x)^2}$

$$y` = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$ kako je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ to je

$$y` = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$ skratimo 1 – sinx, naravno postavimo uslov da je to različito od 0

$$y` = \frac{1}{1-\sin x}$$ **i evo konačnog rešenja!**

c) $y = \dfrac{5-e^x}{e^x+2}$

$$y` = \frac{(5-e^x)`(e^x+2)-(e^x+2)`(5-e^x)}{(e^x+2)^2}$$

$$y` = \frac{-e^x(e^x+2)-e^x(5-e^x)}{(e^x+2)^2}$$ izvlačimo e^x kao zajednički ispred zagrade

$$y` = \frac{-e^x(e^x+2+5-e^x)}{(e^x+2)^2}$$ malo sredimo...

$$y` = \frac{-7e^x}{(e^x+2)^2}$$ konačno rešenje

d) $y = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x}$

$$y` = \frac{(\ln x+1)`\ln x - (\ln x)`(\ln x+1)}{\ln^2 x}$$

$$y` = \frac{\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}(\ln x+1)}{\ln^2 x}$$

$$y` = \frac{\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$y` = \dfrac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$ **pa je** $y` = \dfrac{-1}{x\ln^2 x}$ **konačno rešenje**

6. Odrediti jednačinu tangente funkcije $y = 2x^2 - 3x + 2$ u datoj tački A(2,y) koja pripada funkciji.

Rešenje:

Najpre ćemo naći nepoznatu koordinatu y tako što ćemo u datoj funkciji zameniti $x = 2$

$y = 2 * 2^2 - 6 + 2 = 4$, pa je data tačka ustvari A(2,4)

Da vas podsetimo:

Jednačina tangente

Jednačina tangente na krivu $y=f(x)$ u tački (x_0,y_0) u kojoj je funkcija diferencijabilna, računa se po formuli:

$$y - y_0 = f\,`(x_0)(x - x_0)$$

$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ Nađemo izvod ...

$f\,`(x) = 4x - 3$ Ovde zamenimo vrednost $x = 2$

$f\,`(2) = 8-3 = 5$ Vrednost prvog izvoda u dvojci je 5. **Sad upotrebimo formulu:**

$y - y_0 = f\,`(x_0)(x - x_0)$

$y - 4 = 5\,(x- 2)$ malo prisredimo…

$y = 5x - 6$ **je tražena jednačina tangente**

7. U kojoj tački parabole $y = x^2 - 7x + 3$ je tangenta paralelna sa pravom $y = 5x + 2$?

Rešenje:

$f(x) = x^2 - 7x + 3$ pa je prvi izvod

$f\,`(x) = 2x - 7$

Uslov paralelnosti je da je $k_1= k_2$, iz prave $\mathbf{y = 5x + 2}$ je $k = 5$ pa zaključujemo da je $f\,`(x) = 5$, to jest

$2x - 7 = 5$
$2x = 12$
$x = 6$

Sada ovu vrednost zamenimo u jednačinu parabole da nađemo koordinatu y. Dakle :

$y = x^2 - 7x + 3$
$y = 36 - 42 +3$
$y = -3$
Tražena tačka koja pripada paraboli je (6,-3)

8. Odrediti jednačinu normale funkcije $y = x^4 – x^2 + 3$ u tački M(1,y) koja pripada grafiku te funkcije.

Rešenje:

Najpre nadjemo nepoznatu koordinatu y.

Y = 1 – 1 +3 = 3, dakle koordinate su M(1,3)

Normala se traži po formuli :

Jednačina normale

Normala na krivu y=f(x) u tački (x_0,y_0) je prava normalna na tangentu krive u toj tački. Njena jednačina je :

$$\mathbf{y - y_0 = \frac{-1}{f^`(x_0)}(x - x_0)}$$

$\mathbf{y = x^4 – x^2 + 3}$

$\mathbf{y^` = 4x^3 – 2x}$ pa zamenimo x koordinatu tačke M

$y^`(1)= 4 – 2 =2$ i sad upotrebimo formulu:

$y – 3 = \frac{-1}{2}(x-1)$ **malo sredimo…**

2y – 6 = -x +1 pa je normala n: x+2y –7 = 0 traženo rešenje

WWW.MATEMATIRANJE.IN.RS