FUNKCIONALNE JEDNAČINE

Postupak rešavanja:

i) “ Ono “ što je u zagradi stavimo da je t (smena)

ii) Odatle izrazimo x

iii) Vratimo se u početnu jednačinu , f (t) =... i gde vidimo x zamenimo ga sa onim što smo izrazili

iv) Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po t ” i **zamenimo t sa x**

ZADACI

1) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

Rešenje:

$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ “ Ono “ što je u zagradi stavimo da je t

$x + 1 = t$ Odatle izrazimo x

$x = t - 1$ Vratimo se u početnu jednačinu , f (t) =... i gde vidimo x zamenimo ga sa onim što smo izrazili

$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2$

$f(t) = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2$ Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po t ”

$f(t) = t^2 - 5t + 6$ **zamenimo t sa x**

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ i evo konačnog rešenja date funkcionalne jednačine.

2) **Rešiti funkcionalnu jednačinu:** $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$

Rešenje:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$$

$\frac{1}{x} = t$ **pa je odavde** $\frac{1}{t} = x$ **ovo zamenimo u datoj jednačini**

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$$

$f(t) = \frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}$ **zamenimo t sa x** $f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$ je konačno rešenje

3) **Rešiti funkcionalnu jednačinu:** $f(\frac{x}{x+1}) = x^2$

Rešenje:

$$f(\frac{x}{x+1}) = x^2$$
$$\frac{x}{x+1} = t$$

x = t (x+1)

x = t x + t

x – tx = t izvučemo x kao zajednički na levoj strani...

x (1 – t) = t

$x = \frac{t}{1-t}$ **vratimo se sad na početnu jednačinu...**

$$f(\frac{x}{x+1}) = x^2$$

$f(t) = (\frac{t}{1-t})^2$ **zamenimo t sa x ...** $f(x) = (\frac{x}{1-x})^2$ je konačno rešenje

4) **Reši funkcionalnu jednačinu:** $f(\frac{x+2}{2x+1}) = 5x+3$

Rešenje:

$$f(\frac{x+2}{2x+1}) = 5x+3$$

$$\frac{x+2}{2x+1} = t$$

x + 2 = t (2x + 1)

x + 2 = 2tx + t

x – 2tx = t – 2

x (1 – 2t) = t – 2

$$x = \frac{t-2}{1-2t}$$

$$f(\frac{x+2}{2x+1}) = 5x+3$$

f (t) = 5 $\frac{t-2}{1-2t}$ **+ 3 sredimo… f (t) =** $\frac{5t-10}{1-2t} + \frac{3(1-2t)}{1-2t} = \frac{5t-10+3-6t}{1-2t} = \frac{-t-7}{1-2t}$ **izvučemo minus gore i ubacimo ga u imenilac, koji onda promeni redosled … A - B = - (B – A)**

f (t) = $\frac{t+7}{2t-1}$

f (x) = $\frac{x+7}{2x-1}$ **je konačno rešenje**

5) **Ako je** $f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$**, izračunati f(3).**

Rešenje:

Najpre moramo naći f(x).

$$f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$$

$$\frac{x}{x+1} = t$$

x = t (x+1)

x = t x + t

x – tx = t

x (1 – t) = t

$x = \frac{t}{1-t}$ **vraćamo se u početnu jednačinu…**

$$f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$$

f (t) = ($\frac{t}{1-t}$ **- 1)**^{2} **Sada umesto t stavljamo 3 jer se traži f(3)…**

f (3) = ($\frac{3}{1-3}$ **- 1)**^{2} **=** $\frac{25}{4}$

6) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$

Rešenje:

$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ uzimamo smenu $x+\frac{1}{x}=t$, ako odavde probamo da izrazimo x kao što bi trebalo,

zapadamo u probleme...

$x+\frac{1}{x}=t$ sve pomnožimo sa x…

$x^2+1=xt$

$x^2-xt+1=0$ ovo je kvadratna po x i ne vodi rešenju…

TRIK : OVDE SMENU TREBAMO KVADRIRATI

$x+\frac{1}{x}=t$ kvadriramo…

$(x+\frac{1}{x})^2=t^2$

$x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2$ pokratimo x-seve…

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ E sad se vratimo u datu početnu jednačinu...

$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ **pa je $f(t)=t^2-2$ odnosno $f(x)=x^2-2$ je konačno rešenje**

7. Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

I ovaj zadatak ne možemo uraditi " klasično" već se moramo poslužiti trikom...

Ako uzmemo smenu $\frac{x-2}{x+1}=t$ **, onda je** $\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{t}$ **i**

$\frac{x-2}{x+1}=t$ **odavde** x-2 = t (x +1) pa je x – 2= tx + t , x – tx = t + 2 , x (1-t)= t + 2 i odavde je x = $\frac{t+2}{1-t}$

Vratimo se u datu jednačinu:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}$ dobili smo jednu jednačinu...**E sad je trik da umesto t stavimo** $\frac{1}{t}$

$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t}+2}{1-\frac{1}{t}}=\frac{\frac{1+2t}{t}}{\frac{t-1}{t}}=\frac{1+2t}{t-1}$ dobismo i drugu jednačinu

Sada pravimo sistem od dve jednačine:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}$$
$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 pa saberemo ove dve jednačine...

$$-4f(t)-2f\left(\frac{1}{t}\right)=-2\,\frac{t+2}{1-t}$$
$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}$$

$-3f(t)=\frac{-2t-4}{1-t}+\frac{1+2t}{t-1}=\frac{2t+4}{t-1}+\frac{1+2t}{t-1}=\frac{4t+5}{t-1}$ dakle

$-3f(t)=\frac{4t+5}{t-1}$ podelimo sve sa –3 i dobijamo f (t) = $\frac{4t+5}{-3(t-1)}$ odnosno f (t) = $\frac{4t+5}{3-3t}$ umesto t stavimo x i dobijamo:

f (x) = $\frac{4x+5}{3-3x}$ konačno rešenje