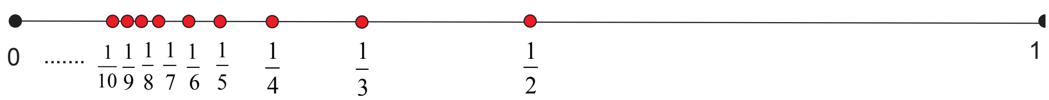
GRANIČNA VREDNOST NIZA

Ako ustanovimo šta se dešava sa opštim članom niza a_n u situaciji kada se n povećava (često se kaže kad *n* teži beskonačnosti a zapisuje $n \to \infty$) onda znamo šta se dešava i sa celim nizom.

Posmatrajmo niz $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...) = (a_n)$ ili u skraćenom zapisu $a_n = \frac{1}{n}$

Jasno je da kada n raste, to jest uzimamo sve veći broj, to je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ bliži nuli.



Onda kažemo da je 0 granična vrednost niza $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...) = (a_n)$

a to još zapisujemo i kao

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ovo čitamo: limes kad n teži beskonačnosti od jedan kroz n je jednak nuli.

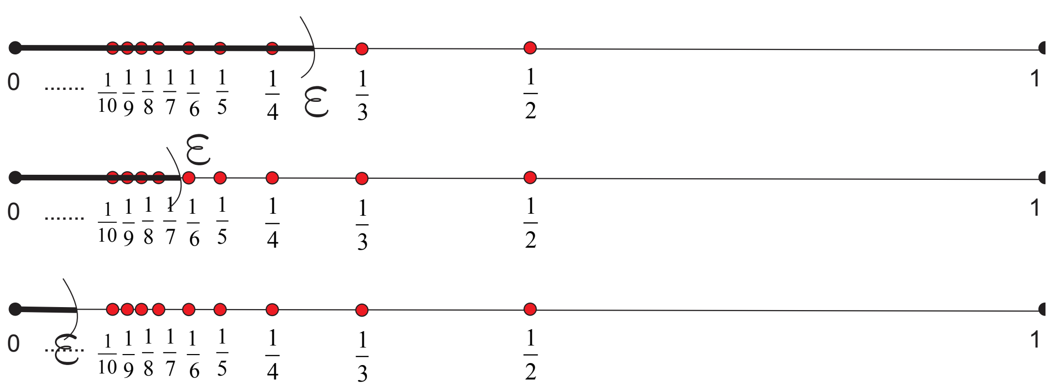
Na brojevnoj pravoj vidimo kako se članovi niza grupišu oko nule (sa desne strane nule).

Ako oko tačke 0 opišemo neki interval , ma koliko on mali bio , u njemu će se uvek nalaziti,

kako se to matematički kaže ``skoro svi `` članovi niza.

Taj interval koji uzimamo se obeležava sa

$\varepsilon - epsilon,$ a govorimo o ε okolini te tačke.



Ma koliko bio mali interval, u njemu će biti **svi osim njih konačno mnogo** članova niza (kako se to opet matematički kaže).

Dakle:

Realan broj a je granična vrednost niza $\left(a_n\right)$ ako se u proizvoljnoj ε-okolini broja a nalaze skoro svi članovi niza.

Ako takav broj a postoji, onda kažemo da je niz $\left(a_n\right)$ **konvergentan** i da konvergira ka a.

Zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Glavna definicija (ne opisna kao ova naša) glasi:

Broj $a \in R$ je granična vrednost niza $\left(a_n\right)$, u oznaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ako i samo ako

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)$ **tako da za** $(\forall n \geq n_0)$ **važi nejednakost** $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$

Dalje ćemo uraditi nekoliko primera u kojima ćemo pokušati da razjasnimo kako se koristi definicija.

PRIMER 1.

Pomoću definicije granične vrednosti niza dokazati da je

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2n-1} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n} = 1$

Rešenje:

a)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2n-1} = 0$ znači ovde je $a_n = \dfrac{3}{2n-1}$ i $a = 0$

Pretpostavimo da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi nejednakost: $\left|a_n - a\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\dfrac{3}{2n-1} - 0\right| = \left|\dfrac{3}{2n-1}\right| < \varepsilon$

Da bi 0 bila granična vrednost niza, potrebno je još dokazati da postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$, što znači da on zavisi od ε, počevši od koga pa nadalje, ova nejednakost važi za svaki prirodan broj.

Kako je $\dfrac{3}{2n-1} > 0$ za svaki prirodan broj,po pretpostavci imamo da je $\dfrac{3}{2n-1} < \varepsilon$

Sad nam je posao da odavde izrazimo n.

$$\frac{3}{2n-1} < \varepsilon$$

$$2n-1 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$2n > \frac{3}{\varepsilon} + 1 .... / :2$$

$$n > \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Dakle $n_0 = n_0(\varepsilon)$ je prvi prirodan broj veći od $\frac{3}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$. Kako je ε unapred zadata konstanta, tada, za svaki $\varepsilon > 0$, možemo naći takav prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Ovim je dokaz završen.

b)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1} = 0$ znači ovde je $a_n = \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1}$ i $a = 0$

Pretpostavimo da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi nejednakost: $\left| \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1} \right| < \varepsilon$

Znamo da je sinusna funkcija ograničena izmedju -1 I 1 pa dalje zaključujemo da je

$$\left| \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{2n^2-1} \right| = \left| \frac{1}{2n^2-1} \right| < \varepsilon \to \frac{1}{2n^2-1} < \varepsilon$$

Sad odavde da izrazimo n:

$$\frac{1}{2n^2-1} < \varepsilon$$

$$2n^2 - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$2n^2 > \frac{1}{\varepsilon} + 1 .... /2$$

$$n^2 > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \quad \text{korenujemo}$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}}$$

Broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$ je prvi prirodan broj veći od $\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}}$. Počevši od njega pa nadalje, $(\forall n \geq n_0)$ važi početna nejednakost.

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1 \qquad a_n=\frac{n+2}{n} \text{ i } a=1$$

$$|a_n-a|<\varepsilon \to \left|\frac{n+2}{n}-1\right|=\left|\frac{n+2-n}{n}\right|=\left|\frac{2}{n}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{2}{n}<\varepsilon \to n>\frac{2}{\varepsilon}$$

Broj $n_0=n_0(\varepsilon)$ je prvi prirodan broj veći od $\frac{2}{\varepsilon}$. Počevši od njega pa nadalje, $(\forall n\geq n_0)$ važi da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=0$$

Dakle, još jednom da ponovimo:

Broj $a\in R$ **je granična vrednost niza** (a_n) **, u oznaci** $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ **, ako i samo ako**

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N)$ **tako da za** $(\forall n\geq n_0)$ **važi nejednakost** $|a_n-a|<\varepsilon$

Ako takav broj a postoji, onda kažemo da je niz (a_n) **konvergentan** i da konvergira ka a .

Zapisujemo $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

Ako takav broj a ne postoji, onda kažemo da niz (a_n) **nije konvergentan** , to jest da je **divergetan**.

Razlikujemo odredjeno i neodredjeno divergentne nizove.

Niz (a_n) teži ka $+\infty$ ako $(\forall M>0)(\exists n_0\in N)$ takav da je $a_n>M, \forall n\geq n_0$

Zapisujemo $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

Niz (a_n) teži ka $+\infty$ ako $(\forall M>0)(\exists n_0\in N)$ takav da je $a_n<-M, \forall n\geq n_0$

Zapisujemo $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

Nizovi koji divergiraju ka + ili – beskonačno nazivaju se **odredjeno divergentni nizovi**.

Nizovi koji nisu ni konvergentni ni odredjeno divergentni nazivaju se **neodredjeno divergentni nizovi**.