Geometrijski niz

Podjimo od dva primera:
Primer 1. 3, 6, 12, 24, 48 ...
Primer 2. 81, 27, 9, 3, ...

Pažljivim posmatranjem možemo zaključiti da je svaki sledeći član niza u **primeru 1**. 3,6,12,24,48 ... 2 puta veći od predhodnog člana , pa će sledeći članovi biti, $48 \cdot 2 = 96, \quad 96 \cdot 2 = 192, ...$

U **primeru 2.** 81,27,9,3, ... primećujemo da je svaki sledeći član tri puta manji od predhodnog, pa bi sledeći članovi bili $3:3=1, \quad 1:3=\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}:3=\frac{1}{9}, ...$

Ovakvi nizovi zovu se **geometrijski** i kao što vidimo , mogu biti rastući (primer 1.) i opadajući (primer 2.)

Dakle: **Niz brojeva u kome je količnik ma koja dva uzastopna člana niza stalan zove se geometrijski niz ili progresija**. Naravno i ovde je važno od kog broja počinje niz, pa se taj broj zove "prvi" član niza i obeležava se sa b_1.

$\rightarrow$ za primer 1. $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12, ...$

$\rightarrow$ za primer 2. $b_1 = 81$, $b_2 = 27$, $b_3 = 9, ...$

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = ... = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q \rightarrow$ **količnik niza**

$\rightarrow$ za primer 1. $q = 2$ (rastući niz)

$\rightarrow$ za primer 2. $q = \frac{1}{3}$ (opadajući niz)

Ako znamo b_1 (prvi član niza) i q (količnik niza) niz je potpuno odredjen , odnosno možemo da ga zapišemo.

Bilo koji član niza (n-ti član) se traži po formuli :

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Zbir prvih n-članova niza se traži

i) $q > 1$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

ii) $q < 1$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Za svaki član niza važi: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \rightarrow$ geometrijska sredina

Ako izmedju brojeva a i b treba umetnuti (interpolirati) k brojeva tako da zajedno sa a i b čine geometrijski niz, onda količnik q tog niza tražimo po formuli :

$$q=\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Zadaci:

1)

Odrediti geometrijsku progresiju kod koje je $b_1+b_3=15 \wedge b_2+b_4=30$

Rešenje:

$$\begin{aligned} b_1+b_3&=15\\ b_2+b_4&=30 \end{aligned}$$

Iskoristimo formulu : $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, po njoj je:

$$\begin{aligned} b_3&=b_1\cdot q^2\\ b_2&=b_1\cdot q\\ b_4&=b_1\cdot q^3 \end{aligned}$$

Zamenimo ovo u postavljeni sistem:

$$\begin{aligned} b_1+b_1q^2&=15\\ b_1q+b_1q^3&=30 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Izvučemo "zajednički" iz obe jednačine:

$$\begin{aligned} b_1(1+q^2)&=15\\ b_1q(1+q^2)&=30 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Ovde je "trik" da se jednačine podele.

$$\frac{\cancel{b_1}\ \cancel{(1+q^2)}}{\cancel{b_1}q\ \cancel{(1+q^2)}}=\frac{15}{30}$$

$\rightarrow$ Skratimo šta može !

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}\Rightarrow q=2$$

Vratimo se u jednu od jednačina: (naravno biramo lakšu).

$$\begin{aligned} b_1(1+q^2)&=15\\ b_1(1+4)&=15\Rightarrow b_1=3 \end{aligned}$$

Traženi niz je : 3,6,12,24,48,…

2) Izračunati deseti član geometrijskog niza 1,3,9,27...

Rešenje:

$\underset{b_1}{\underset{\downarrow}{1}}, \underset{b_2}{\underset{\downarrow}{3}}, \underset{b_3}{\underset{\downarrow}{9}}, \underset{b_4}{\underset{\downarrow}{27}},...$ Iz tog niza zaključujemo da je: $b_1 = 1$ i $q = 3$

Pošto se bilo koji član niza računa po formuli $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ to će deseti član biti :

$$
\begin{aligned}
b_{10} &= b_1 \cdot q^{10-1} \\
b_{10} &= b_1 \cdot q^9 \\
b_{10} &= 1 \cdot 3^9 \\
b_{10} &= 3^9 \\
b_{10} &= 19683
\end{aligned}
$$

3) U geometrijskom nizu je : $b_6 - b_4 = 216 \wedge b_3 - b_1 = 8 \wedge S_n = 40$

Izračunati b_1**_,q i_** n

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
b_6 - b_4 &= 216 \\
b_3 - b_1 &= 8 \\
S_n &= 40
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
b_6 &= b_1 \cdot q^5 \\
b_4 &= b_1 \cdot q^3 \\
b_3 &= b_1 \cdot q^2
\end{aligned}
$$

Zamenimo u prve dve jednačine!

$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 \cdot q^5 - b_1 \cdot q^3 &= 216 \\
b_1 q^2 - b_1 &= 8
\end{aligned}
\right\}
$$

izvučemo zajednički

$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 q^3 (q^2 - 1) &= 216 \\
b_1 (q^2 - 1) &= 8
\end{aligned}
\right\}
$$

podelimo ih

$$\frac{\cancel{b_1} q^3 \cancel{(q^2 - 1)}}{\cancel{b_1} \cancel{(q^2 - 1)}} = \frac{216}{8}$$

$$q^3 = 27 \Rightarrow q^3 = 3^3 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

$$b_1 (q^2 - 1) = 8$$

$$b_1 (3^2 - 1) = 8 \Rightarrow b_1 \cdot 8 = 8 \Rightarrow \boxed{b_1 = 1}$$

$$\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=40$$

$$\frac{3^n-1}{2}=40$$

Pošto je $q=3>1$ koristimo formulu $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ $\Rightarrow 3^n-1=80$

$$3^n=81$$

$$3^n=3^4\Rightarrow \boxed{n=4}$$

4) Tri broja, čiji je zbir 26, obrazuju geometrijski niz. Ako se im brojevima doda redom 1,6 i 3, dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Odrediti te brojeve.

Rešenje:

Neka su tri broja : $b_{1,}b_2$ i b_3 I važi : $b_1+b_2+b_3=26$ a kako je $b_2=b_1q\wedge b_3=b_1q^2$

to će biti $b_1+b_1q+b_1q^2=26$ tj. $\boxed{b_1(1+q+q^2)=26}$

Ako im dodamo redom 1,6 i 3 dobićemo aritmetički niz:

$$a_1=b_1+1$$
$$a_2=b_2+6=b_1q+6$$
$$a_3=b_3+3=b_1q^2+3$$

Pošto oni čine aritmetičku progresiju, mora biti : $a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}$ tj, $a_1+a_3=2a_2$

$\underset{a_1}{(b_1+1)}+\underset{a_3}{(b_1q^2+3)}=\underset{a_2}{2(b_1q+6)}\rightarrow$ "sredimo"

$$b_1+1+b_1q^2+3=2b_1q+12$$
$$b_1q^2-2b_1q+b_1=12-1-3$$
$$\boxed{b_1(q^2-2q+1)=8}$$

Napravimo sada sistem od ove dve uokvirene jednakosti:

$$\left.\begin{aligned}b_1(q^2+q+1)=26\\ b_1(q^2-2q+1)=8\end{aligned}\right\}\text{ podelimo ih}$$

$$\frac{q^2+q+1}{q^2-2q+1}=\frac{26}{8}$$

$$26(q^2-2q+1)=8(q^2+q+1)\,/:2$$

$$13(q^2-2q+1)=4(q^2+q+1)$$

$$13q^2-26q+13=4q^2+4q+4$$

$$9q^2-30q+9=0$$

$3q^2-10q+3=0 \rightarrow$ kvadratna "po q"

$$q_{1,2}=\frac{10\pm 8}{3\cdot 2}=\frac{10\pm 8}{6}$$

$$q_1=3 \wedge q_2=\frac{1}{3}$$

$Za \quad \underline{q=3}$

$$b_1=\frac{26}{q^2+q+1}=\frac{26}{13}=2$$

Rešenja

$2,6,18 \rightarrow$ Geometrijski niz

$3,12,21 \rightarrow$ Aritm. Niz

$Za \quad \underline{q=\frac{1}{3}}$

$$b_1=\frac{26}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}=\frac{26}{\frac{13}{9}}=18$$

Rešenja

$18,6,2 \rightarrow$ Geometrijski niz

$19,12,5 \rightarrow$ Aritm. Niz

5) Izračunati zbir n brojeva oblika 1, 11, 111, 1111…

Rešenje:

1, 11, 111, 1111, …

Trik je napisati brojeve drugačije:

$$1=\frac{10-1}{9}$$

$$11=\frac{100-1}{9}=\frac{10^2-1}{9}$$

$$111=\frac{1000-1}{9}=\frac{10^3-1}{9}$$

…….itd.

$$S_n=1+11+111+\ldots=$$

$$=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}$$

$$=\frac{1}{9}\left[10-1+10^2-1+10^3-1+\ldots+10^n-1\right] \quad \text{Pazi: ima n jedinica...}$$

$$=\frac{1}{9}[10+10^2+\ldots+10^n-n] \quad \text{ovde je } 10+10^2+\ldots+10^n \to \text{geometrijski niz}$$

Geometrijski niz $\to$ $b_1=10 \wedge q=10$

$$S=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$ ovo je za geometrijski niz, pa je :

$$S_n=\frac{1}{9}\left[\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-n\right]$$

$$S_n=\frac{1}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]=\boxed{\frac{1}{81}\left[10(10^n-1)-9n\right]}$$

6) Izračunati zbir n brojeva oblika $\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{23}{24}, \frac{47}{48} ...$

Rešenje:

Sličan trik kao malopre!

$$\frac{5}{6} = \frac{6-1}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$
$$\frac{11}{12} = \frac{12-1}{12} = 1 - \frac{1}{12}$$
$$\frac{23}{24} = \frac{24-1}{24} = 1 - \frac{1}{24}$$

…….itd.

$$S_n = \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{23}{24} + ... = 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{24} + ...$$

$$= n - (\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + ...)$$

geometrijski niz

$$b_1 = \frac{1}{6} \qquad q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S = \frac{\frac{1}{6}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{1}{3}(1-(\frac{1}{2})^n)$$

Dakle :

$$S_n = n - \frac{1}{3}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$$

$$\boxed{S_n = n - \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]}$$

7) Ako su a, b, c k-ti , n-ti i p-ti članovi jedne geometrijske progresije tada je $a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = 1$. Dokazati.

Rešenje:

Koristićemo formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Pošto je a k-ti član $\Rightarrow a = b_1 \cdot q^{k-1}$

Pošto je b n-ti član $\Rightarrow b = b_1 \cdot q^{n-1}$

Pošto je c p-ti član $\Rightarrow c = b_1 \cdot q^{p-1}$

$$a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = [b_1 q^{k-1}]^{n-p} \cdot [b_1 \cdot q^{n-1}]^{p-k} \cdot [b_1 \cdot q^{p-1}]^{k-n} =$$
$$b_1^{n-p} \cdot q^{(k-1)(n-p)} \cdot b_1^{p-k} \cdot q^{(n-1)(p-k)} \cdot b_1^{k-n} \cdot q^{(p-1)(k-n)}$$

<u>Izračunajmo posebno "izložilac" za b_1:</u>

$$n - p + p - k + k - n = 0$$

<u>Sada ćemo izračunati "izložilac" za q:</u>

$$(k-1)(n-p) + (n-1)(p-k) + (p-1)(k-n) =$$
$$kn - kp - n + p + np - kn - p + k + pk - pn - k + n = 0$$

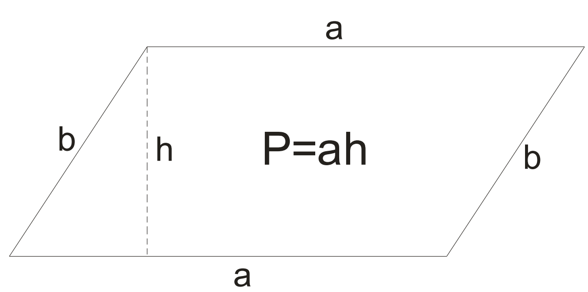
Kao što primećujete sve se potire!

Pa je : $a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = b_1^{o} \cdot q^{o} = 1$

Kraj dokaza.

8) Odrediti paralelogram tako da merni brojevi osnovice, visine i površine čine geometrijski niz.

Rešenje:



$a,h,P \rightarrow$ čine geometrijski niz

$\boxed{P = a \cdot h} \rightarrow$ formula za površinu

A pošto a,h,P čine geometrijski niz , to mora biti:

$$h = \sqrt{aP} \Rightarrow h^2 = aP \Rightarrow \boxed{P = \frac{h^2}{a}}$$

Uporedimo ove dve uokvirene formule za površinu:

$$ah = \frac{h^2}{a} \Rightarrow h = a^2 \Rightarrow P = a \cdot a^2 = a^3$$

Dakle: $a = a, h = a^2$ i $P = a^3$

Beskonačni red

Neka je dat beskonačni niz realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Izraz oblika $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zove se **beskonačni red.**

Geometrijskom nizu $a, aq, aq^2, ..., aq^n, ...$ odgovara red:

$a(1 + q + q^2 + ... + q^n + ...) = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Zbir (suma)beskonačno opadajućeg reda (geometrijskog) je $\boxed{S = \frac{a}{1-q}}$ za $|q| < 1$

Zadaci:

1) Decimalni broj 0,7777777… prebaciti u razlomak

Rešenje:

$$0,7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$$
$$= \frac{7}{10}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...)$$
$$= \frac{7}{10}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...)$$

Ovde imamo geometrijski red , $a = \frac{7}{10}, q = \frac{1}{10}$

Njegova suma je $S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$

2) Izračunati vrednost mešovito periodičnog razlomka 0,3444….

Rešenje:

$$0,3444... = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + ...$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{4}{100} \cdot (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...)$$

Pazi: $\frac{4}{100} \cdot (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...)$ **je geometrijski red** : $a = \frac{4}{100}, q = \frac{1}{10}$

$$= \frac{3}{10} + \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{4}{90} = \boxed{\frac{31}{90}}$$

3) Nadji red ako je $S = \frac{3}{3-x}$

Rešenje:

Mi znamo da je formula : $S = \frac{a}{1-q}$

Znači gde je 3 - x treba da je 1-q. Izvršićemo "sredjivanje" izraza :

$$S = \frac{3}{3-x} = \frac{3}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \Rightarrow a = 1, q = \frac{x}{3}$$

Pa će traženi red biti:

$$a(1 + q + q^2 + q^3 + ...) =$$

$$1 \cdot (1 + \frac{x}{3} + (\frac{x}{3})^2 + (\frac{x}{3})^3 + ...) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + ...$$

4) Nadji red ako je $S = \dfrac{6}{3-2x}$

Rešenje:

$$S = \frac{6}{3-2x} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}(1-\frac{2x}{3})} = \frac{2}{1-\frac{2x}{3}} \Rightarrow a = 2, q = \frac{2x}{3}$$

Pa će red biti :

$$a(1+q+q^2+q^3+...+) =$$
$$2(1+\frac{2x}{3}+(\frac{2x}{3})^2+(\frac{2x}{3})^3+...) =$$
$$2+\frac{4x}{3}+\frac{8x^2}{9}+\frac{16x^3}{27}+...$$

5) Sledeći periodični razlomak pretvoriti u običan razlomak 2,717171….

Rešenje:

$$2,717171... = 2+\frac{7}{10}+\frac{1}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+...$$

Ovde ćemo uočiti 2 geometrijska reda:

$$S_1 = \frac{7}{10}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{100000}+... = \frac{7}{10}(1+\frac{1}{100}+...)$$
$$S_2 = \frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+... = \frac{1}{100}(1+\frac{1}{100}+...)$$

Zbir prvog reda je $S_1 = \dfrac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{99}{100}} = \dfrac{70}{99}$

Zbir drugog reda je $S_2 = \dfrac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \dfrac{1}{99}$

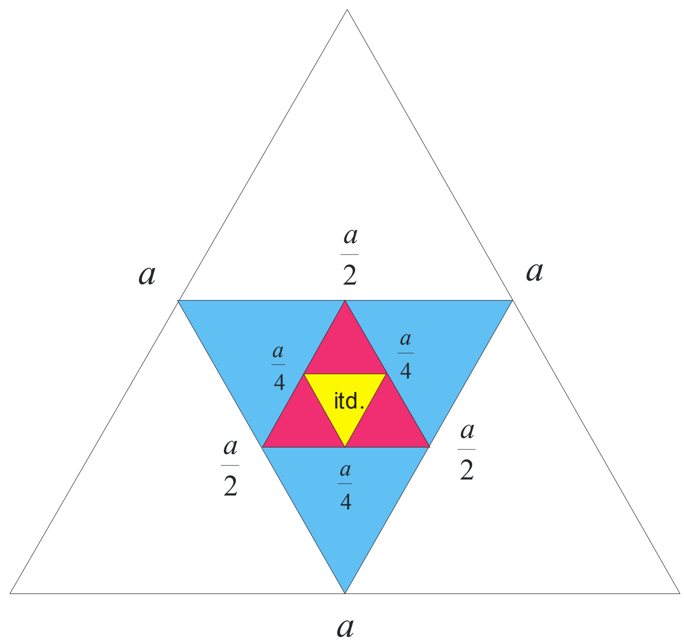
Vratimo se "na zadatak":

$$2,717171... = 2+\frac{70}{99}+\frac{1}{99} = \frac{269}{99}$$

$$\boxed{S = \frac{269}{99}}$$

6) **U jednakostraničnom trouglu stranice a upisan je novi jednakostranični trougao spajanjem sredinama datog trougla . U dobijenom trouglu je upisan drugi trougao na isti način, itd. Odrediti zbir obima svih trouglova.**

Rešenje:



Stranica 1. trougla je a

Stranica 2. trougla je $\frac{a}{2}$

Stranica 3. trougla je $\frac{a}{4}$

Stranica 4. trougla je $\frac{a}{8}$

……. Itd.

Njihovi obimi će biti : $O = 3 \cdot a$

Znači:

$$O_1 = 3a$$
$$O_2 = 3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$
$$O_3 = 3 \cdot \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$$
$$O_4 = 3 \cdot \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$$
$$......itd.$$

A njihov zbir je :

$$O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + ... =$$
$$= 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + ...$$
$$= 3a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...)$$
$$= 3a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...)$$

Ovde je *A=3a* i $q = \frac{1}{2}$

po formuli : $S = \frac{A}{1-q}$

$$= \frac{3a}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3a}{\frac{1}{2}} = 6a$$

Znači zbir obima je 6a.