MATEMATIČKA INDUKCIJA

Princip matematičke indukcije glasi:
Ako za neko tvrdjenje $T(n)$, $n \in N$ važi:

1) $T(1)$ **je tačno**
2) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ **je tačno za** $\forall_n = 1,2,...$ **tada je tvrdjenje** $T(n)$ **tačno za** $\forall_n \in N$

Može se desiti da tvrdjenje Tn nije tačno za svako $n \in N$ već počev od nekog prirodnog broja $n_0 > 1$ pa , tj. da je Tn tačno za $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2,...$

Tada se dokazivanje metodom matematičke indukcije radi na sledeći način:

1) Proverimo tačnost tvrdjenja Tn_0
2) Dokazujemo da za bilo koje $n > n_0$ iz tačnosti tvrdjenja Tn sledi tačnost tvrdjenja $Tn+1$

Postupak

Praktično, **mi ćemo indukciju sprovoditi**:

i) Proverimo da li je tvrdjenje tačno za n = 1
ii) Predpostavimo da je tvrdjenje tačno za n = k
iii) Dokazujemo da je tvrdjenje tačno za n = k+1

Primeri:

1) Dokazati da je : $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Rešenje:

i) Najpre proverimo dali je tvrdjenje tačno za n=1.(to jest gde vidimo n stavimo 1)

$1 = \dfrac{1(1+1)}{2} \Rightarrow \; 1 = 1$ tačno

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k (to nam je indukcijska hipoteza)
Gde vidimo n stavimo k

$1+2+3+...+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

iii) **Da dokažemo da je tvrdjenje tačno za n=k+1**

Najpre vidimo šta treba da dokažemo, u početnoj formuli n zamenimo sa k+1 ali

uvek na levoj strani napišemo i predposlednji član.

$$1+2+...+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{predposlednji član}}}{k}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

odnosno: $1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Znači , ovo treba da dokažemo!

Uvek krenemo od indukcijske hipoteze za koju smo pretpostavili da je uvek tačna

$$1+2+3...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Zastanemo malo i uporedimo leve strane hipoteze i onoga šta treba da dokažemo. Vidimo da u hipotezi "fali" (k+1). To je **TRIK**, da na obe strane hipoteze dodamo izraz (k+1).

$$1+2+3...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$1+2+3...+k+(k+1)=\boxed{\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)}\text{ desna strana}$$

Sad nam preostaje da "sredimo" desnu stranu i iz nje dobijemo $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Dakle:

$$\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k+1}{1}=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\text{ Izvučemo zajednički }(k+1)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Ovim je dokaz završen.

2) Dokazati da je: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Rešenje:

i) Proverimo da li je tvrdjenje tačno za $n=1$

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \Rightarrow 1=1 \text{ tačno}$$

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n=k$

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

iii) Da dokažemo tvrdjenje za $n=k+1$
Uvek prvo vidimo šta treba dokazati!

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

tj. $1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Krenimo od indukcijske hipoteze i na obe strane dodamo $(k+1)^2$

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+(k+1)^2$$

Leva strana onog što treba da dokažemo.

Ovo kad "sredimo" treba da nam da $\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+(k+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$ Ovo treba dokazati!

Pakujemo :

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)^2}{1}=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

[Izvučemo "zajednički" $(k+1)$] $=\dfrac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$

$$=\frac{(k+1)\left[2k^2+k+6k+6\right]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[2k^2+7k+6\right]}{6}$$

Izraz $2k^2+7k+6$ ćemo rastaviti na činioce upotrebom znanja iz kvadratne jednačine:

$$\boxed{ak^2+bk+c=a(k-k_1)(k-k_2)}$$

$$2k^2+7k+6=0$$
$$k_{1,2}=\frac{-7\pm1}{4}$$
$$k_1=-\frac{3}{2}$$
$$k_2=-2$$

Dakle:

$$2k^2+7k+6=2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)=(2k+3)(k+2)$$

Vratimo se u zadatak:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)^2}{1}=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}=\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

A ovo smo i trebali dokazati!

3) Dokazati da je: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

Rešenje:

i) Proverimo da li je tvrdjenje tačno za n=1

$$\frac{1}{(2\cdot1-1)(2\cdot1+1)}=\frac{1}{2\cdot1+1}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{ tačno!!!}$$

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

iii) Dokažemo da tvrdjenje važi za n=k+1. Prvo da vidimo šta treba da dokažemo!

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Dokaz ćemo kao i obično početi od indukcijske hipoteze

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$ **hipoteza**

na obe strane ćemo dodati $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\boxed{\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

ovo treba da se "sredi'' na $\frac{k+1}{2k+3}$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$2k^2+3k+1=0 \qquad 2k^2+3k+1=a(k-k_1)(k-k_2)$$

$$k_{1,2}=\frac{-3\pm 1}{4} \qquad =2\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$$

$$k_1=-\frac{1}{2} \qquad =(2k+1)(k+1)$$

$$k_2=-1$$

Vratimo se u zadatak:

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

4) Dokazati da je $5^{n-1}+2^n$ deljiv sa 3

Rešenje:

i) Za n=1 $\quad 5^{n-1}+2^n=5^{1-1}+2^1=5^o+2$

$=1+2=3$

Tačno

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k

to jest da je $5^{k-1}+2^k$ **deljivo sa 3**

iii) Dokažimo da je za n = k+1 izraz deljiv sa 3:

$$
\begin{aligned}
5^{n-1}+2^n &= 5^{k+1-1}+2^{k+1} \\
&= 5^{k-1+1}+2^k\cdot 2^1 \\
&= 5^{k-1}5^1\cdot +2^k\cdot 2 \\
&= 5\cdot 5^{k-1}+2\cdot 2^k
\end{aligned}
$$

Važi: $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$

Napišimo kao "trik'': $5\cdot 5^{k-1}=3\cdot 5^{k-1}+2\cdot 5^{k-1}$ to jest $5 = 3 + 2$

$$
\begin{aligned}
&= 3\cdot 5^{k-1}+2\cdot 5^{k-1}+2\cdot 2^k \\
&= 3\cdot 5^{k-1}+2(5^{k-1}+2^k)
\end{aligned}
$$

Ovo je sigurno deljivo sa 3.

Zašto?

Izraz $3\cdot 5^{k-1}$ je deljiv sa 3 zbog činioca trojke.

Izraz $2(5^{k-1}+2^k)$ je deljiv sa 3 zbog naše pretpostavke da je $5^{k-1}+2^k$ deljiv sa 3.

Ovim je dokaz završen.

5) Dokazati da je broj $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$ deljiv sa 11

<u>Rešenje:</u>

i) za n=1 je $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}=6^{2}+3^{3}+3^{1}$

$$=36+27+3$$

$$=66=6\cdot 11$$

tačno

ii) pretpostavimo da je broj $6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}$ **deljiv sa 11**

iii) "odradimo" dokaz za n = k+1

Koristimo pravila za stepenovanje $(a^{m+n}=a^{m}\cdot a^{n})$

$$6^{2(k+1)}+3^{k+1+2}+3^{k+1}=$$

$$6^{2k+2}+3^{k+2+1}+3^{k+1}=$$

$$6^{2k}\cdot 6^{2}+3^{k+2}\cdot 3^{1}+3^{k}\cdot 3^{1}=$$

$$36\cdot 6^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k}=$$

Sad treba neka ideja!

Pošto uz 6^{2k} imamo 36, trojke uz 3^{k+2} i 3^{k} ćemo napisati kao 36-33

Toje ideja: $36\cdot 6^{2k}+\underset{36-33}{\boxed{3}}\cdot 3^{k+2}+\underset{36-33}{\boxed{3}}\cdot 3^{k}$

Dakle:

$$36\cdot 6^{2k}+36\cdot 3^{k+2}-33\cdot 3^{k+2}+36\cdot 3^{k}-33\cdot 3^{k}=$$

$$=36(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})-33(3^{k+2}+3^{k})$$

Izraz $36(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})$ je deljiv sa 11 zbog indukcijske pretpostavke,

a izraz $33(3^{k+2}+3^{k})$ zbog broja $33=3\cdot 11$

Ovim je dokaz završen.

6) Dokazati da za ma koji prirodni broj $n>1$ važi nejednakost:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

<u>Rešenje:</u>

Pazi, pošto kaže $n>1$ prva stavka će biti da ispitamo da li je tvrdjenje tačno za n=2

i) Za n=2 je $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$

$\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$ tačno tvrdjenje

ii) pretpostavimo da je tačno za n = k

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

iii) da dokažemo da je tvrdjenje tačno za n = k+1

Treba da dokažemo:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}$$

Moramo upotrebiti novi "trik''!

Obeležimo sa:

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k} \qquad (S_k>\frac{13}{24}\text{, po pretpostavci})$$

i $$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

Odredimo razliku $S_{k+1}-S_k$!!!

$$S_{k+1}-S_k=\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}-...-\frac{1}{2k}$$

= svi se skrate sem:

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1}$$
$$= \frac{1 \cdot 2(k+1) + 1 \cdot (2k+1) - 2(k+1)}{(2k+1) \cdot 2 \cdot (k+1)}$$
$$= \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(2k+1)(k+1)}$$
$$= \frac{1}{2(2k+1)(k+1)} > 0$$

Ovo je sigurno pozitivno jer je $k > 0 \quad 2k+1 > 0$ i $k+1 > 0$

Dakle: $S_{k+1} - S_k > 0$ odnosno:

$$\underbrace{S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}}_{\textbf{indukcijska hipoteza}}$$

pa je $S_{k+1} > \frac{13}{24}$

Ovim je dokaz završen!

7) **Dokazati da je:**

$2^n > n^2$ **za svako** $n \geq 5$

<u>Rešenje:</u>

Dokaz počinjemo za $n = 5$

i)

$n = 5 \Rightarrow 2^5 > 5^2$
$36 > 25$ tačno

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k
dakle $2^k > k^2$

iii) Dokažimo da je tvrdjenje tačno za n=k+1
znači, treba da dokažemo:
$2^{k+1} > (k+1)^2$

I ovde je potrebna nova ideja!

Posmatrajmo izraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

pošto je $n \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{25}$

onda je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25}$

$$1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} = 1 + \frac{11}{25} < 2$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < 2$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} < 2$$

onda je i $\frac{(k+1)^2}{k^2} < 2$ a hipoteza je $2^k > k^2$. Napišimo ove dve nejednakosti jednu pored druge.

$$\left.\begin{aligned} 2^k &> k^2 \\ 2 &> \frac{(k+1)^2}{k^2} \end{aligned}\right\} \text{pomnožimo ih! (levu sa levom i desnu sa desnom stranom)}$$

$$2^k \cdot 2 > \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot k^2$$

$$2^{k+1} > \frac{(k+1)^2}{\cancel{k^2}} \cdot \cancel{k^2}$$

$2^{k+1} > (k+1)^2 \rightarrow$ **a ovo smo i trebali da dokažemo**