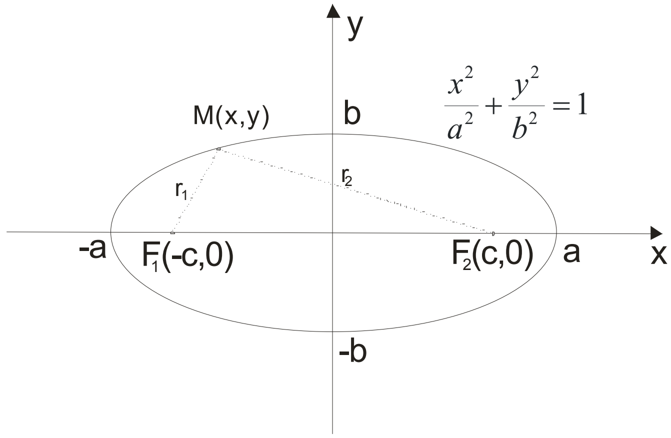
ELIPSA

Elipsa je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka(žiža) stalan broj.



r_1, r_2 su potezi (radijus vektori) elipse i važi za bilo koju tačku na elipsi $r_1 + r_2 = 2a$ (konstantan broj)

$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ su žiže elipse , gde je $c^2 = a^2 - b^2$

a - je velika poluosa , odnosno 2a je velika osa

b - je mala poluosa, odnosno 2b je mala osa

$e = \frac{c}{a}$ je ekscentricitet (još kod elipse važi da je e<1)

Glavna jednačina elipse je $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ ili $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Primer 1.

Odrediti jednačinu elipse , ako žiže imaju koordinate $(\pm 3, 0)$, *a dužina veće ose jednaka je 12.*

Najpre iz podatka o žižama zaključimo da je c = 3.

Kako je 2a = 12 to mora biti a = 6. (odnosno $a^2 = 36$)

Iskoristimo da je $c^2 = a^2 - b^2$

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$3^2 = 6^2 - b^2$$
$$9 = 36 - b^2$$
$$b^2 = 36 - 9$$
$$b^2 = 27$$

Zamenimo u jednačinu elipse i $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ evo rešenja.

Primer 2.

Odrediti jednačinu elipse koja sadrži tačke M(6,4) i N (- 8, 3)

Koordinate datih tačaka ćemo zameniti u jednačinu elipse, ali je bolje da koristimo oblik $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$M(6,4) \to b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$b^2 6^2 + a^2 4^2 = a^2b^2$$
$$36b^2 + 16a^2 = a^2b^2$$

$$N(-8,3) \to b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$b^2(-8)^2 + a^2 3^2 = a^2b^2$$
$$64b^2 + 9a^2 = a^2b^2$$

Sad uporedimo leve strane ove dve jednakosti jer su im desne iste!

$$36b^2 + 16a^2 = 64b^2 + 9a^2$$
$$16a^2 - 9a^2 = 64b^2 - 36b^2$$
$$7a^2 = 28b^2$$
$$a^2 = 4b^2$$

Sada se vratimo u jednu od ove dve jednakosti i zamenimo dobijenu vrednost.

$$a^2 = 4b^2$$
$$\underline{64b^2 + 9a^2 = a^2b^2}$$
$$64b^2 + 9 \cdot 4b^2 = 4b^2b^2$$
$$100b^2 = 4b^4$$
$$4b^4 - 100b^2 = 0$$
$$4b^2(b^2 - 25) = 0$$
$$b^2 = 25 \to a^2 = 4 \cdot 25 \to a^2 = 100$$

Zamenimo ovo u jednačinu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

i evo rešenja.

__Elipsa i prava__

Slično kao kod kružnice, da bi odredili međusobni položaj prave i elipse, rešavamo sistem jednačina:

$y = kx + n$ i $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

- Ako sistem nema rešenja , onda se prava i elipsa ne seku, to jest $a^2k^2 + b^2 < n^2$
- Ako sistem ima dva rešenja, onda prava seče elipsu u dvema tačkama $a^2k^2 + b^2 > n^2$
- Ako sistem ima jedno rešenje, prava je tangenta elipse i zadovoljava USLOV DODIRA:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Napomena

Ako nam traže tangentu elipse u datoj tački (x_0, y_0) na elipsi (koja pripada elipsi), onda imamo gotovu formulu:

$$t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

__Primer 3.__

U presečnim tačkama prave $5x - 3y - 14 = 0$ *i elipse* $x^2 + 3y^2 = 28$ *konstruisane su tangente na elipsu.Odrediti jednačine tangenata.*

Ovde najpre moramo rešiti sistem jednačina i naći tačke preseka.

$5x - 3y - 14 = 0$ odavde izrazimo x...

$\underline{x^2 + 3y^2 = 28}$

$x = \dfrac{3y+14}{5} \rightarrow$ ovo zamenimo u drugu jednačinu

$$(\frac{3y+14}{5})^2 + 3y^2 = 28$$

$$\frac{9y^2 + 84y + 196}{25} + 3y^2 = 28$$

$$9y^2 + 84y + 196 + 75y^2 = 700$$

$84y^2 + 84y - 504 = 0$ sve podelimo sa 84

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = 2$

$y_2 = -3$

odavde je

$$y_1 = 2 \rightarrow x_1 = \frac{3 \cdot 2 + 14}{5} \rightarrow x_1 = 4$$

$$y_2 = -3 \rightarrow x_2 = \frac{3 \cdot (-3) + 14}{5} \rightarrow x_2 = 1$$

Dobili smo da se prava i elipsa seku u tačkama (4, 2) i (1,-3).

Pošto su to tačke **na elipsi** upotrebićemo gotovu formulu: $t:\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}=1$

Najpre da elipsu prebacimo u drugi oblik:

$x^2+3y^2=28$ celu jednačinu podelimo sa 28

$\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{3y^2}{28}=1$ Kad se desi da nema skraćivanja, prebacimo taj broj " ispod"...

$\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{y^2}{\frac{28}{3}}=1$

$za(4,2)\rightarrow t_1:\dfrac{x\cdot 4}{28}+\dfrac{y\cdot 2}{\frac{28}{3}}=1$

Kad malo sredimo...

$t_1:2x+3y-14=0$

$za(1,-3)\rightarrow t_2:\dfrac{x\cdot 1}{28}+\dfrac{y\cdot(-3)}{\frac{28}{3}}=1$

Kad malo sredimo...

$t_2:x-9y-28=0$

Primer 4.

Odrediti parametar p tako da prava $y+x+p=0$ predstavlja tangentu elipse $2x^2+3y^2=30$

E ovde već moramo koristiti uslov dodira. Najpre sredimo pravu i elipsu da iz njih možemo pročitati šta nam treba za uslov dodira.

$y+x+p=0$

$y=-x-p$

Odavde je $k=-1$ i $n=-p$

$2x^2+3y^2=30$ sve podelimo sa 30

$\dfrac{2x^2}{30}+\dfrac{3y^2}{30}=1$

$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1\rightarrow a^2=15$ i $b^2=10$

Dalje koristimo uslov dodira:

$a^2k^2+b^2=n^2$

$15(-1)^2+10=(-p)^2$

$25=p^2$

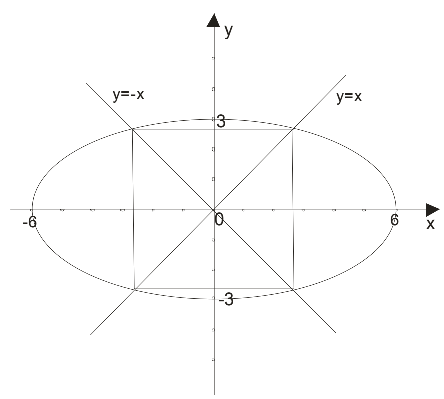
$p_1=5$

$p_2=-5$

Primer 5.

U elipsu $x^2+4y^2=36$ *upisan je kvadrat. Odrediti njegovu površinu.*

Ovde je neophodno nacrtati sliku i postaviti problem.



Šta možemo uočiti?

Prave y = x i y = - x u preseku sa elipsom daju temena tog upisanog kvadrata!

Dakle rešavamo sistem y = x i $x^2+4y^2=36$

$$\begin{aligned}&x^2+4y^2=36\\&\underline{y=x}\\&x^2+4x^2=36\\&5x^2=36\\&x^2=\frac{36}{5}\to x_1=\frac{6}{\sqrt{5}},x_2=-\frac{6}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Kako je y = x i y = - x

Koordinate temena su $A(\frac{6}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}});B(\frac{6}{\sqrt{5}},-\frac{6}{\sqrt{5}});C(-\frac{6}{\sqrt{5}},-\frac{6}{\sqrt{5}});D(-\frac{6}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}})$

Obeležimo stranicu kvadrata sa *a.* Njenu dužinu dobijamo kao rastojanje između tačaka , recimo A i B .

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$a=\sqrt{(\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{6}{\sqrt{5}})^2+(-\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{6}{\sqrt{5}})^2}$$

$a=\sqrt{0+(-\frac{12}{\sqrt{5}})^2}$ kvadriramo

$$a^2=\frac{144}{5}$$

A znamo da je P=a^2

$$P=\frac{144}{5}$$