KRUG (KRUŽNICA)

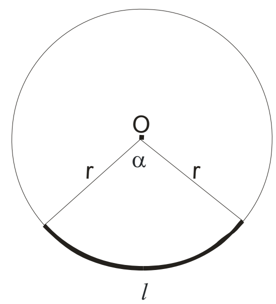
Kružnica je skup tačaka u ravni čija su rastojanja od jedne stalne tačke (centra) jednaka datoj veličini (poluprečniku).

Centar kruga najčešće obeležavamo sa O
Poluprečnik najčešće obeležavamo sa r (pa je onda 2r – prečnik kruga)
Pazite: kružnica je samo linija (kružna) a krug čine ta kružna linija i sve tačke unutar nje

Obim kruga je $O = 2r\pi$

Površina kruga je $P = r^2\pi$

<u>Kružni luk</u>

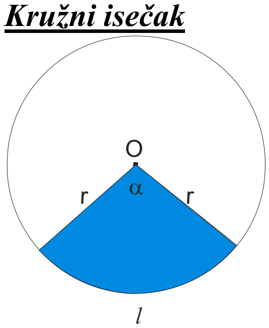


Dužina kružnog luka je: $l=\dfrac{2r\pi}{360^0}\cdot\alpha$

odnosno, može i : $l=\dfrac{O}{360^0}\cdot\alpha$

ili $l=\dfrac{r\pi\alpha}{180^0}$

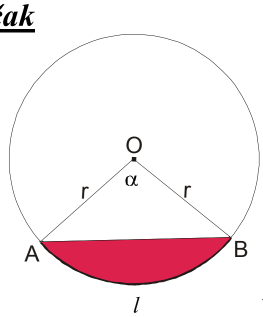
<u>Kružni isečak</u>



Površina kružnog isečka je

$P_{ki}=\dfrac{r^2\pi\alpha}{360^0}$ ili $P_{ki}=\dfrac{r\cdot l}{2}$ ili $P_{ki}=\dfrac{P_{kruga}\cdot\alpha}{360^0}$

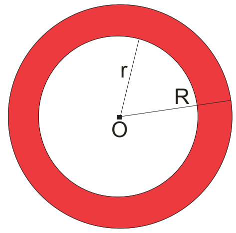
<u>Kružni odsečak</u>



Površina kružnog odsečka se dobija kad od površine kružnog isečka oduzmemo površinu trougla ABO.

$$P_{ods} = P_{ise} - P_{\Delta ABO}$$

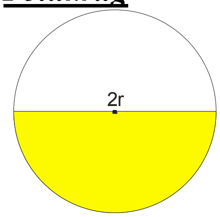
Kružni prsten



$$P_{kp} = (R^2 - r^2)\pi$$

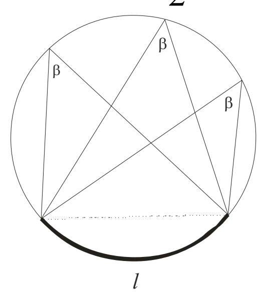
Površina kružnog prstena se računa kad od površine većeg kruga oduzmemo površinu manjeg kruga.

Polukrug

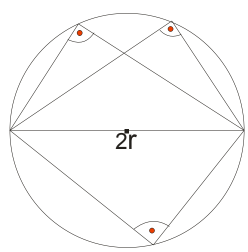


Površina polukruga se naravno dobija kad površinu kruga podelimo sa 2. $P_{polukruga} = \dfrac{r^2\pi}{2}$

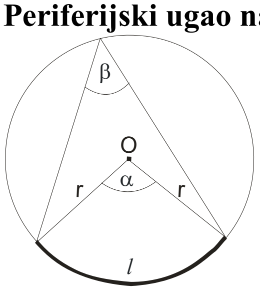
Pazite, obim polukruga je zbir polovine obima kruga i prečnika! $O_{polukruga} = \dfrac{2r\pi}{2} + 2r = r\pi + 2r = r(\pi + 2)$



Nad istim lukom , svi periferijski uglovi su jednaki:



Periferijski ugao nad prečnikom je prav:



$\alpha = 2\beta$

Nad istim lukom, centralni ugao(α) je dva puta veći od periferijskog ugla(β)

To jest: α=2β

E sad može i zadaci sa prijemnih iz ranijih godina:

240. Одредити обим и површину круга полупречника $r = 7\text{cm}$ (за број π узети приближну вредност 3,14).

$r = 7cm$

$\pi \approx 3,14$

$O = ?$

$P = ?$

$O = 2r\pi$

$O = 2 \cdot 7 \cdot 3,14$

$O = 43,96cm$

$P = r^2\pi$

$P = 7^2\pi$

$P = 49 \cdot 3,14$

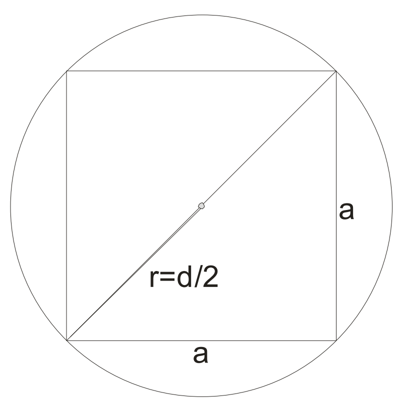
$P = 153,86cm^2$

241. Површина квадрата је 12 cm^2. Одредити површину круга који је описан око тог квадрата.

$P_{kv} = 12cm^2$

$P_{kr} = ?$

Nacrtajmo najpre sliku i uočimo vezu između podataka...



Poluprečnik kruga je polovina dijagonale kvadrata!

Iz površine kvadrata ćemo naći dužinu stranice , a zatim i dijagonalu:

$P = a^2$

$12 = a^2$

$a = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$d = a\sqrt{2}$

$d = 2\sqrt{3}\sqrt{2}$

$d = 2\sqrt{6}cm$

Nadjimo poluprečnik:

$r = \frac{d}{2}$

$r = \frac{2\sqrt{6}}{2}$

$r = \sqrt{6}cm$

$P = r^2\pi$

$P = \sqrt{6}^2\pi$

$P = 6\pi cm^2$

242. Одредити пречник и површину круга чији је обим 31,4 cm и $\pi \approx 3,14$.

$O = 31,4cm$

$\pi \approx 3,14$

$2r = ?$

$P = ?$

Iz formule za obim kruga ćemo naći dužinu poluprečnika (prečnika).

$O = 2r\pi$

$31,4 = 2r \cdot 3,14$

$2r = \frac{31,4}{3,14}$

$2r = 10cm$

$r = 5cm$

$P = r^2\pi$

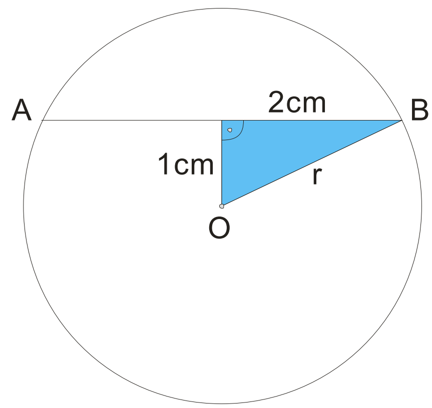
$P = 5^2\pi$

$P = 25 \cdot 3,14$

$P = 78,5cm^2$

243. Дужина тетиве AB датог круга је 4 cm, а њено растојање од центра круга 1 cm. Одредити површину тог круга.

Nacrtajmo sliku najpre:



Polovina tetive AB je 2cm, i ona sa rastojanjem od centra kruga i poluprečnikom pravi pravougli trougao , na kome primenjujemo Pitagorinu teoremu.

Dakle:

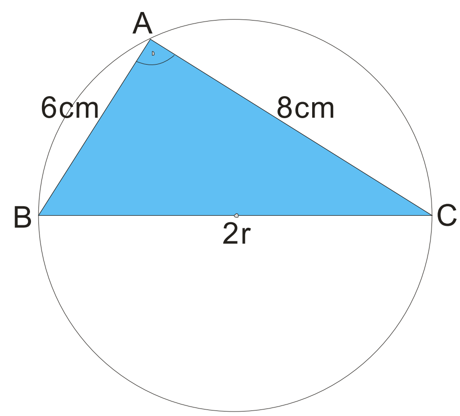
$$r^2 = 2^2 + 1^2$$
$$r^2 = 4 + 1$$
$$r^2 = 5$$

Namerno nismo tražili r, jer nam za površinu treba:

$$P = r^2 \pi$$
$$P = 5\pi$$
$$P = 5\pi cm^2$$

244. Тетиве AB и AC једног круга су ортогоналне и дужина 6 cm и 8 cm. Одредити полупречник и обим тог круга.

I ovde je neophodna slika:



Pošto u zadatku kaže da su tetive ortogonalne (normalne) , one sa prečnikom grade pravougli trougao, pa ćemo tu činjenicu iskoristiti i uz pomoć Pitagorine teoreme naći poluprečnik:

$$(2r)^2 = 6^2 + 8^2$$
$$4r^2 = 36 + 63$$
$$4r^2 = 100$$
$$r^2 = \frac{100}{4}$$
$$r^2 = 25$$
$$r = \sqrt{25}$$
$$r = 5cm$$

Sada tražimo obim:

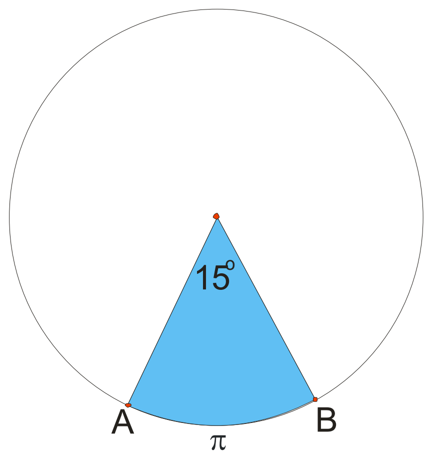
$$O = 2r\pi$$
$$O = 2 \cdot 5\pi$$
$$O = 10\pi cm$$

245. Дужина кружног лука AB једног круга је π cm, а централни угао над тим луком 15°. Одредити обим тог круга.

$l = \pi$

$\alpha = 15^0$

$O = ?$



Znamo da se dužina kružnog luka računa:

$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^0}$ odnosno

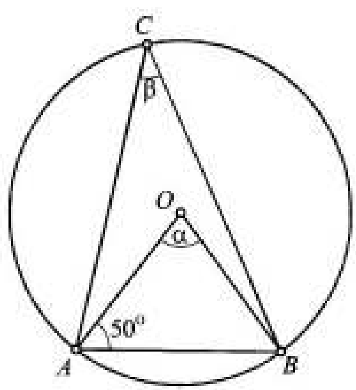
$l = \frac{O \cdot \alpha}{360^0}$ zamenimo date podatke

$\pi = \frac{O \cdot 15^0}{360^0}$

$\pi = \frac{O}{24}$

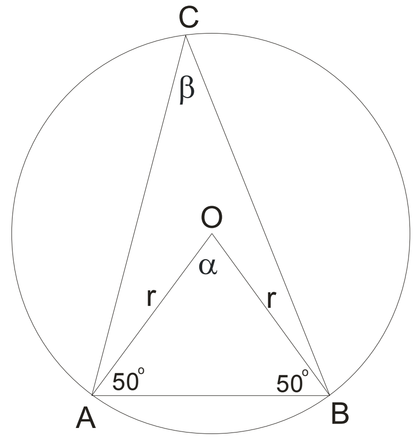
O=24πcm

246. Ако су ознаке као на приложеном цртежу и $\angle BAO = 50°$, одредити назначене углове α и β.



Ako posmatramo trougao ABO, možemo zaključiti da je on jednakokraki , jer su mu dve stranice poluprečnici kruga !

Onda su uglovi OAB i OBA jednaki i iznose po 50 stepeni: $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = 50^0$



Traženi centralni ugao alfa ćemo naći:

$$\alpha = 180^0 - (50^0 + 50^0)$$
$$\alpha = 180^0 - 100^0$$
$$\alpha = 80^0$$

Nad istim lukom centralni ugao je dva puta veći od periferijskog, dakle:

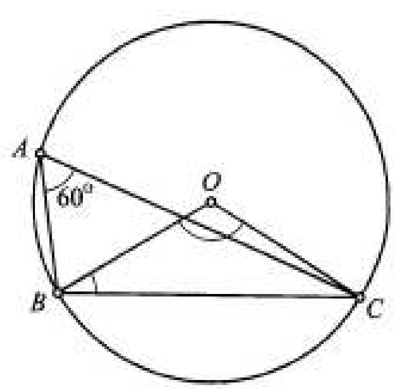
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$
$$\beta = \frac{80^0}{2}$$
$$\beta = 40^0$$

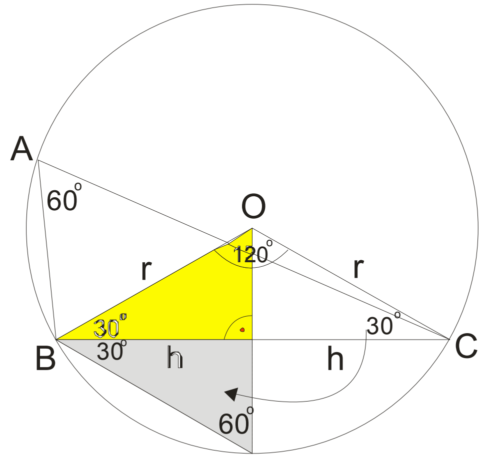
247. Угао између две тетиве AB и AC једног круга је $60°$. Ако је полупречник тог круга $r = 6$ cm и тачка O његов центар, одредити:

А) угао BOC;

Б) угао OBC;

В) дужину тетиве BC.





Najpre uočimo da je ugao BAO od 60 stepeni periferijski nad lukom BC.

Njemu odgovarajući centralni ugao BOC mora biti dva puta veći:

$$\measuredangle BOC = 2 \cdot \measuredangle BAC$$
$$\measuredangle BOC = 2 \cdot 60^0$$
$$\measuredangle BOC = 120^0$$

Kako je trougao BOC jednakokraki , možemo izračunati i njegova dva preostala ugla:

$$\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \frac{180^0 - 120^0}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$$

Dužina tetive BC je ustvari sastavljena od dve visine jednakostraničnog trougla stranice a = r = 6cm

$$h_\triangle = \frac{a_\triangle \sqrt{3}}{2}$$

$$BC = 2h = 2\frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3}cm$$

248. Обим круга је 62,8 cm. Колики је централни угао α који одговара кружном луку дужине 12,56 cm ($\pi \approx 3,14$)?

$O = 62,8cm$

$l = 12,56cm$

$\pi \approx 3,14$

$\alpha = ?$

$l = \dfrac{2r\pi\alpha}{360^0}$ odnosno

$l = \dfrac{O \cdot \alpha}{360^0}$ zamenimo date podatke

$12,56 = \dfrac{62,8 \cdot \alpha}{360^0}$

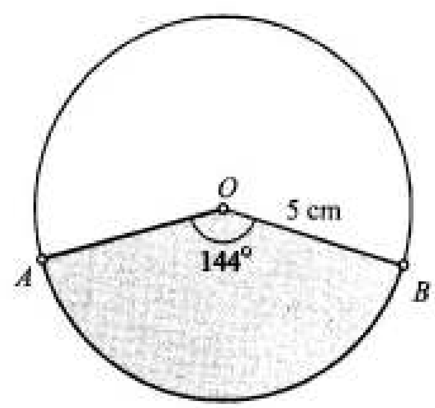
$62,8 \cdot \alpha = 12,56 \cdot 360^0$

$\alpha = \dfrac{12,56 \cdot 360^0}{62,8}$ skratimo

$\alpha = \dfrac{360^0}{5}$

$\alpha = 72^0$

249. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину кружног лука AB и површину одговарајућег исечка ($\pi \approx 3,14$).



Sa crteža možemo “ pročitati” da je :

$r = 5cm$

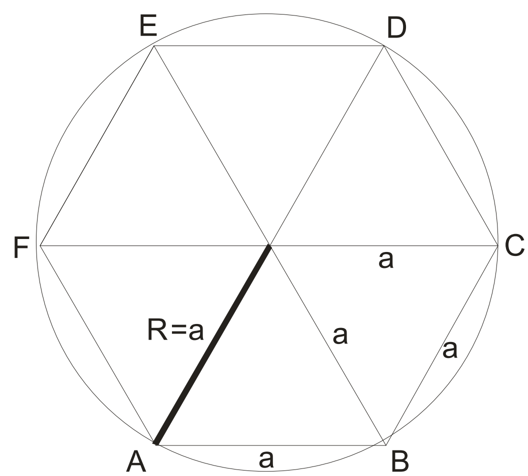
$\alpha = 144^0$

$\pi \approx 3,14$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}$$
$$l = \frac{5 \cdot 3,14 \cdot 144^0}{180^0}$$
$$l = 12,56cm$$

$$P = \frac{r \cdot l}{2}$$
$$P = \frac{5 \cdot 12,56}{2}$$
$$P = 31,4cm^2$$

250. Правилни шестоугао је уписан у круг површине 64π cm^2. Одредити обим тог шестоугла.



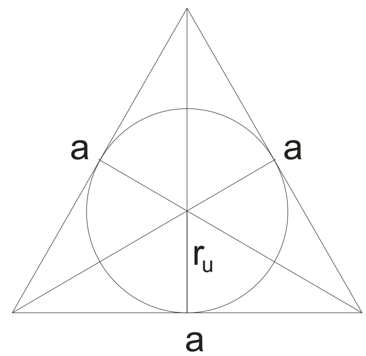
Iz površine kruga ćemo naći poluprečnik , a znamo da je on jednak stranici šestougla (vidi sliku)

$$P = r^2\pi$$
$$64\pi = r^2\pi$$
$$r^2 = 64$$
$$r = \sqrt{64}$$
$$r = 8cm$$

Kako je r = a = 8cm, to je obim šestougla jednak:

$$O_{š} = 6a$$
$$O_{š} = 6 \cdot 8$$
$$O_{š} = 48cm^2$$

251. Висина једнакостраничног троугла је 6 cm. Одредити обим и површину круга који је уписан у тај троугао.



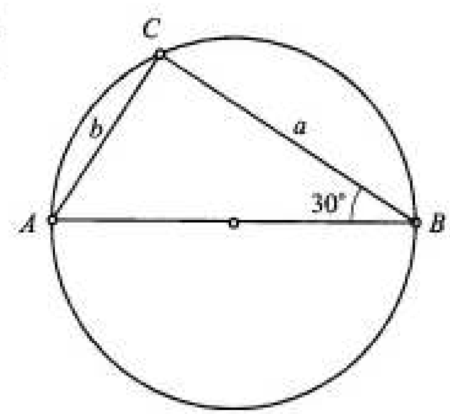
Znamo da je poluprečnik upisane kružnice jednak trećini visine!

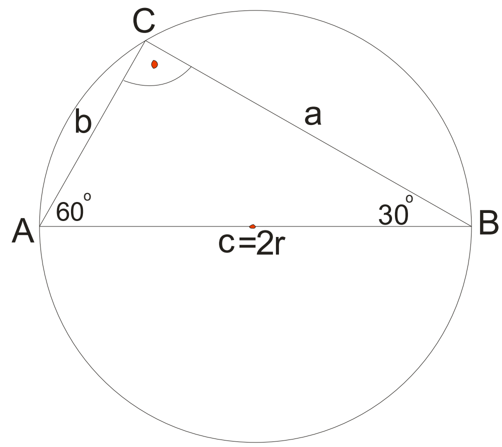
$$r_u = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2cm$$

$$O = 2r\pi$$
$$O = 2\cdot 2\pi$$
$$O = 4\pi cm$$

$$P = r^2\pi$$
$$P = 2^2\pi$$
$$P = 4\pi cm^2$$

252. Један угао правоуглог троугла ABC је $\beta = 30°$, а површина његовог описаног круга је $P = 36\ \pi\ \text{cm}^2$. Одредити катете тог троугла.





Kako se centar opisane kružnice nalazi na sredini najduže stranice(hipotenuze) , zaključujemo da se radi o

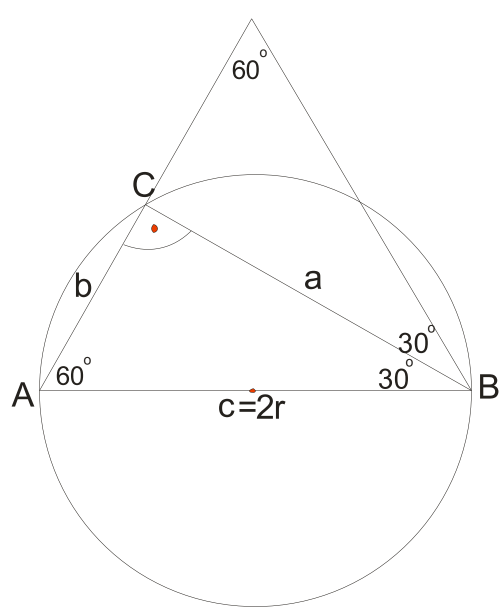
pravouglom trouglu!

Naravno, odmah možemo zaključiti da je ugao BAC jednak 60^0.

Iz površine kruga ćemo naći poluprečnik:

$$P = r^2\pi$$
$$36\pi = r^2\pi$$
$$r^2 = 36$$
$$r = \sqrt{36}$$
$$r = 6cm$$

Kako je c = 2r , zaključujemo da je : **c = 12cm**



Trougao ABC je sa ovim uglovima od 30, 60 i 90 stepeni ustvari polovina jednakostraničnog trougla ,

stranice c =12cm!

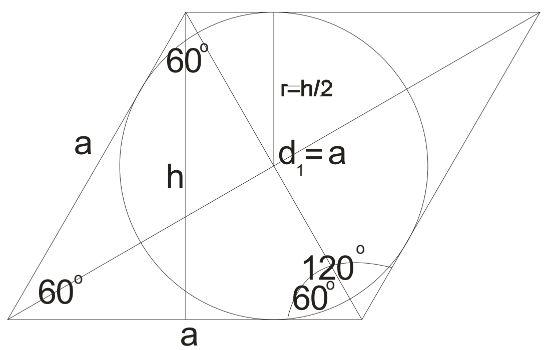
$$b = \frac{c}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$$

Stranica a je visina tog jednakostraničnog trougla stranice 12 cm, pa je :

$$a = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}cm$$

253. **Страница ромба је $a = 4\sqrt{3}$ cm, а један његов угао 120°. Одредити површину круга који је уписан у тај ромб.**

I ovde je neophodna slika:



Kako je jedan ugao romba 120^0, znamo da će drugi ugao biti $180^0 - 120^0 = 60^0$

Na taj način smo dobili jednakostanični trougao i zaključujemo da je $d_1 = a$.

Poluprečnik upisanog kruga kod romba jednak je polovini visine!

A visina je visina jednakostraničnog trougla stranice

$a = 4\sqrt{3}cm$

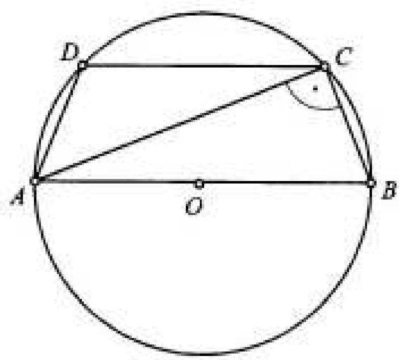
Dakle:

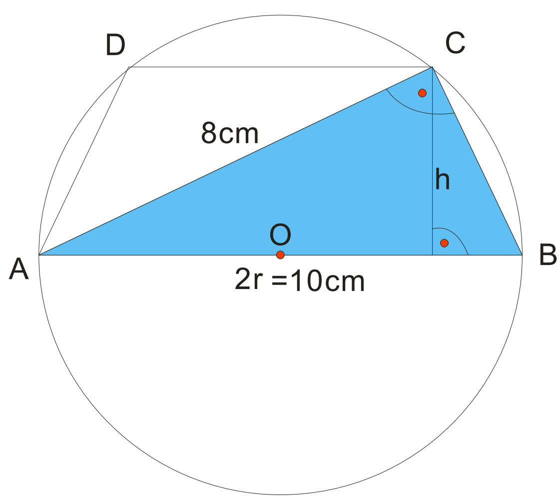
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$h = 6cm$$

$$r = \frac{h}{2} = \frac{6}{2}$$
$$r = 3cm$$

$$P = r^2\pi$$
$$P = 3^2\pi$$
$$P = 9\pi cm^2$$

254. Центар круга описаног око трапеза $ABCD$ је на основици AB. Ако је $AB = 10$ cm и $AC = 8$ cm, одредити крак и висину тог трапеза.





Uočimo trougao ABC. On je svakako pravougli. Pitagorina teorema će nam dati krak BC

$BC^2 = 10^2 - 8^2$

$BC^2 = 100 - 64$

$BC^2 = 36$

$BC = \sqrt{36}$

$BC = 6cm$

Visina trapeza je i visina trougla ABC, preko formule je:

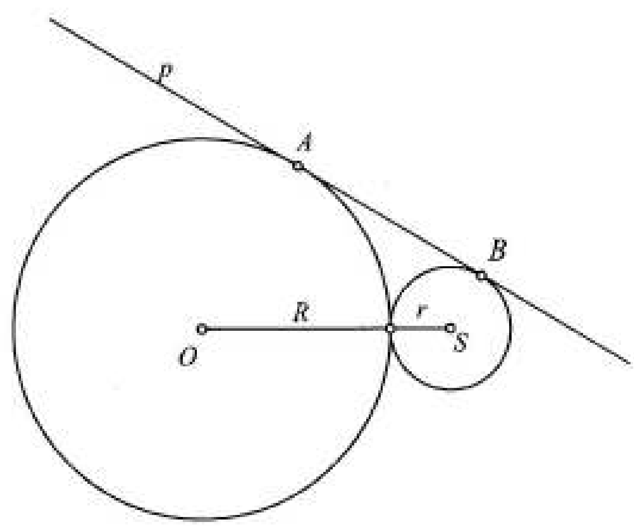
$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$ (za pravougli trougao)

$h = \frac{6 \cdot 8}{10}$

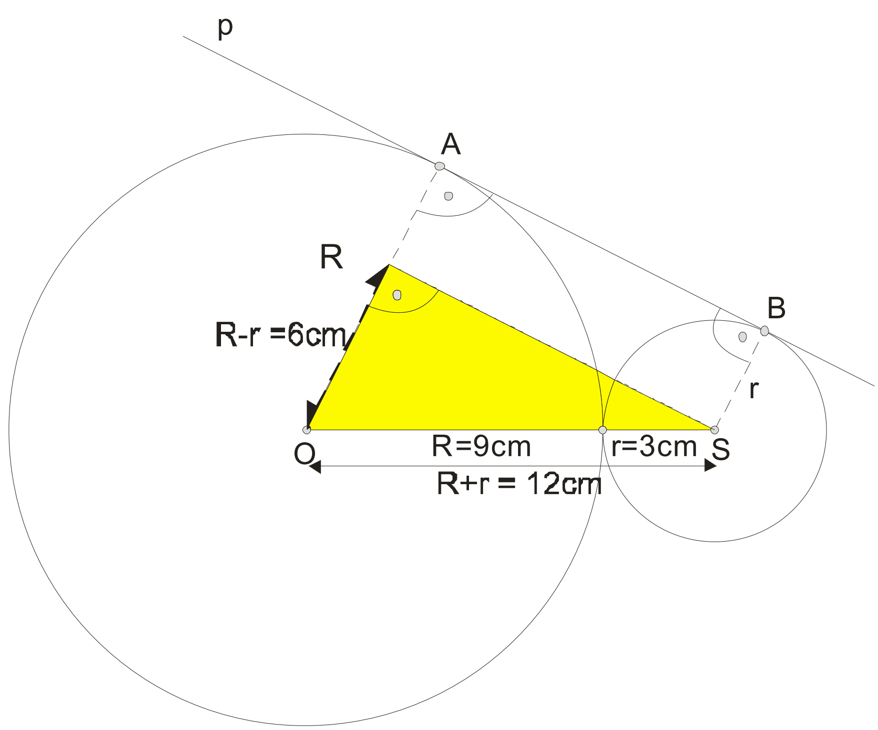
$h = \frac{48}{10}$

$h = 4{,}8cm$

255. Кругови $k(O, R)$ и $k_1(S, r)$ се додирују споља. Права p додирује те кругове у тачкама A и B. Ако је $R = 9$ cm и $r = 3$ cm, одредити AB.



Dopunimo najpre datu sliku:



Prava p je tangenta oba kruga.Ako spojimo O i A, S i B, dobijamo pravougli trapez OABS. Što pravougli?

Jer znamo da je tangenta normalna na poluprečnik (u tačkama A i B).

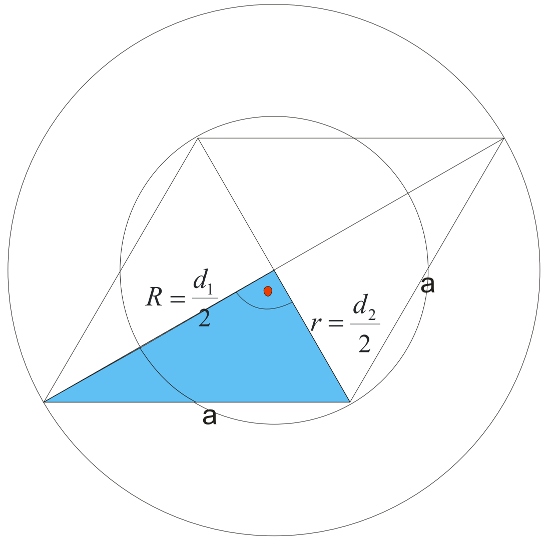
Tražena dužina AB je ustvari visina tog pravouglog trapeza!

Primenom Pitagorine teoreme na označeni trougao dobijamo:

$$AB^2 = 12^2 - 6^2$$
$$AB^2 = 144 - 36$$
$$AB^2 = 108$$
$$AB = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}cm$$

256. Пречници кругова k_1 и k_2 су дијагонале AC и BD ромба $ABCD$ чија је страница $a = 5$ cm. Одредити збир површина та два круга.

I ovde je slika vrlo bitna:



Poluprečnici krugova su dakle polovine dijagonala (vidi sliku).

Ako pokušamo da nađemo te poluprečnike , nećemo uspeti!

Ovaj zadatak se radi drugačije.

Nama se traži zbir površina ta dva kruga, pa je :

$$P_1 + P_2 = R^2\pi + r^2\pi$$
$$= \pi(R^2 + r^2)$$

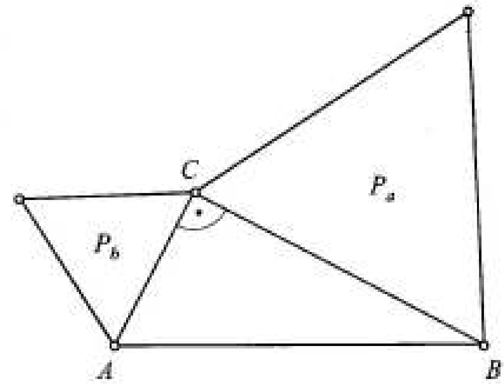
Zastanimo ovde malo i primenimo Pitagorinu teoremu:

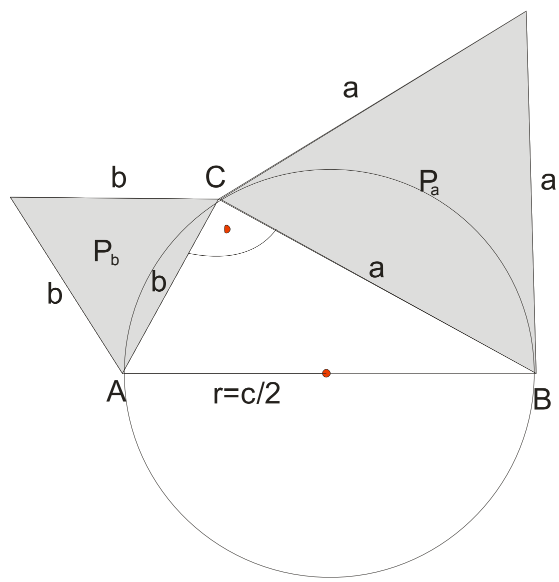
$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$
$$R^2 + r^2 = a^2$$
$$R^2 + r^2 = 5^2$$
$$R^2 + r^2 = 25$$

Vratimo se u zadatak:

$$P_1 + P_2 = R^2\pi + r^2\pi$$
$$= \pi(R^2 + r^2) \quad \text{zamenimo da je } R^2 + r^2 = 25$$
$$= 25\pi cm^2$$

257. Над катетама правоуглог троугла ABC су конструисани једнакостранични троуглови чије су површине $P_a = 64\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ и $P_b = 36\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$. Одредити површину круга који је описан око троугла ABC.





Najpre ćemo iz površina trouglova naći dužine kateta a i b.

$$P_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad\qquad P_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$64\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad\qquad 36\sqrt{3} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$64 = \frac{a^2}{4} \qquad\qquad 36 = \frac{b^2}{4}$$

$$a^2 = 64 \cdot 4 \qquad\qquad b^2 = 36 \cdot 4$$

$$a^2 = 256 \qquad\qquad b^2 = 144$$

$$a = \sqrt{256} \qquad\qquad b = \sqrt{144}$$

$$a = 16cm \qquad\qquad b = 12cm$$

Primenom Pitagorine teoreme nalazimo dužinu hipotenuze c:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 16^2 + 12^2$

$c^2 = 256 + 144$

$c^2 = 400$

$c = \sqrt{400}$

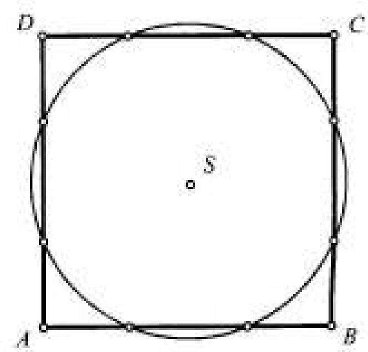
$c = 20cm$

Znamo da se centar opisane kružnice kod pravouglog trougla nalazi na sredini hipotenuze:

$$r = \frac{c}{2} = \frac{20}{2} = 10cm$$

$$P = r^2\pi = 10^2\pi = 100\pi cm^2$$

258. Површина датог квадрата $ABCD$ је 36 cm^2. Одредити површину круга k чији је центар средиште S тог квадрата и који његову страницу AB дели на три једнака дела.



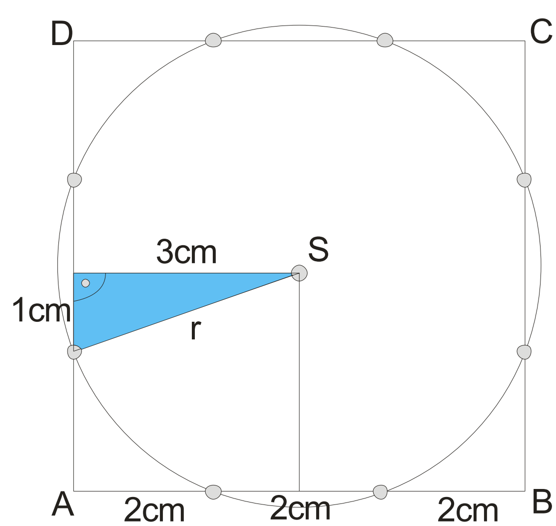
Iz površine kvadrata ćemo naći dužinu stranice kvadrata:

$P = a^2$

$36 = a^2$

$a = \sqrt{36}$

$a = 6cm$



Pošto je cela stranica 6cm, svaki od malih delića biće po 2cm.

Primenom Pitagorine teoreme na označeni trougao , nalazimo poluprečnik r.

$r^2 = 3^2 + 1^2$

$r^2 = 9 + 1$

$r^2 = 10$

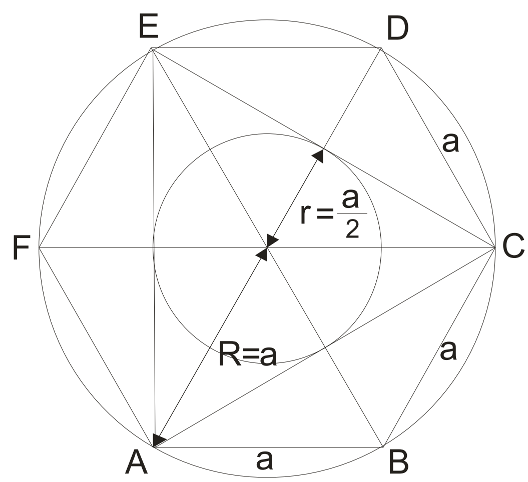
$r = \sqrt{10} cm$

Površina kruga je onda:

$P = r^2 \pi$

$P = 10 \pi cm^2$

259. Круг k је описан око правилног шестоугла $ABCDEF$ странице 6 cm, а круг k_0 уписан у троугао ACE. Одредити површину њиховог кружног прстена.



Nađimo najpre dužine poluprečnika (R i r) .

R = a = 6cm

$r = \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$

Formula za površinu kružnog prstena je:

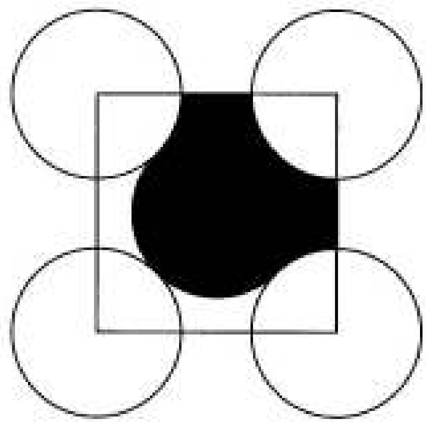
$P_{kp} = (R^2 - r^2)\pi$

$P_{kp} = (6^2 - 3^2)\pi$

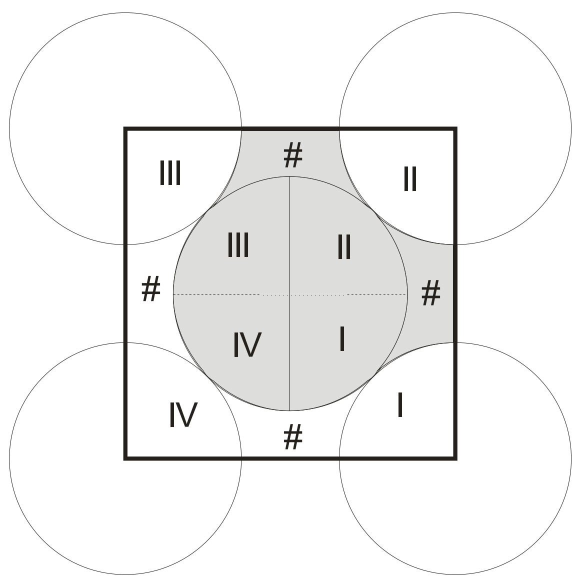
$P_{kp} = (36 - 9)\pi$

$\boxed{P_{kp} = 27\pi cm^2}$

260. На приложеном цртежу, сви кругови су полупречника $r = 1$ cm. Центри четири од њих су темена квадрата и они додирују пети круг споља. Одредити површину осенчене фигуре.



Proučimo najpre datu sliku:

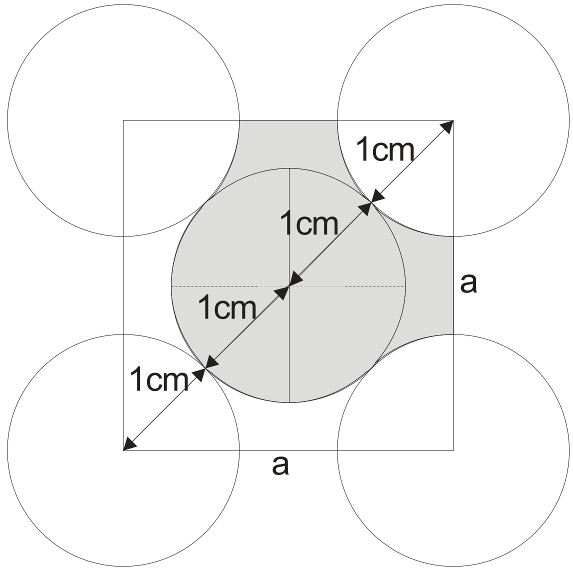


Krug unutar smo podelili na 4 dela. Svaki od tih delova odgovara po jednoj četvrtini krugova okolo.

Delići obeleženi sa # su takođe isti. Šta zaključujemo?

POVRŠINA OSENČENE FIGURE JE JEDNAKA POLOVINI POVRŠINE KVADRATA!

Dakle, da nađemo površinu kvadrata i to podelimo sa 2.



DIJAGONALA KVADRATA SE SASTOJI IZ 4 POLUPREČNIKA!

$$d = 4r$$
$$d = 4 \cdot 1$$
$$d = 4cm$$

Dalje ćemo naći površinu kvadrata:

$$P_{kv} = \frac{d^2}{2}$$
$$P_{kv} = \frac{4^2}{2}$$
$$P_{kv} = \frac{16}{2}$$
$$P_{kv} = 8cm^2$$

I konačno, površina osenčenog dela je:

$$P_{od} = \frac{P_{kv}}{2} = \frac{8}{2} = 4cm^2$$