# PLANIMETRIJA
## Mnogouglovi

**Za pravilne mnogouglove sa n stranica važi:**

- On ima n osa simetrije
- Ako je broj stranica paran on je ujedno centralno simetričan
- Oko svakog pravilnog mnogougla se može opisati kružnica čiji se centri poklapaju
- Može se podeliti na n karakterističnih jednakokrakih trouglova čija su dva temena bilo koja dva susedna temena mnogougla a treće je u centru opisane tj upisane kružnice.
- Zbir svih unutrašnjih uglova sa računa po formuli $S_n = (n-2)\cdot 180^o$
- Jedan unutrašnji ugao je onda $\alpha = \frac{S_n}{n}$
- Jedan spoljašnji ugao je $\alpha_1 = \frac{360^o}{n}$ $\quad (\alpha + \alpha_1 = 180^o)$
- Zbir svih spoljašnjih uglova je $360^o$
- Iz svakog temena mnogougla mogu se povući $d_n = n-3$ dijagonala
- Ukupan broj dijagonala je $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$
- Ako je dužina stranice a onda je obim mnogougla O=na
- Površina se računa po formuli $P = n\frac{ah}{2}$, gde je h visina karakterističnog trougla
- Centralni ugao je $\varphi = \frac{1}{n}360^o$

**1) Koji pravilan mnogougao ima tri puta veći ugao od spoljašnjeg?**

**Rešenje:**
Ako sa $\alpha$ - obeležimo unutrašnji ugao, a sa $\alpha_1$ - spoljašnji ugao traženog mnogougla onda je: $\alpha = 3\alpha_1$ i važi $\alpha + \alpha_1 = 180^o$

Dakle imamo sistem:

$$\alpha = 3\alpha_1$$
$$\alpha + \alpha_1 = 180^o$$

---

$$4\alpha_1 = 180^o \Rightarrow \alpha_1 = \frac{180^o}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 45^o$$

Kako je $n = \dfrac{360^o}{\alpha_1}$ to je: $n = \dfrac{360^o}{45^o}$, $n = 8$ Radi se o osmouglu!

**2) Izračunati unutrašnji ugao pravilnog mnogougla, ako je razlika broja dijagonala i stranica 25.**

**Rešenje:**

Pošto broj dijagonala obeležavamo sa $D_n \Rightarrow D_n - n = 25$

$\dfrac{n(n-3)}{2} - n = 25 \rightarrow$ sve pomnožimo sa 2
$n(n-3) - 2n = 50$
$n^2 - 3n - 2n = 50$
$n^2 - 5n - 50 = 0 \rightarrow$ Dobili smo kvadratnu jednačunu po $n$
$n_1 = 10$
$n_2 = -5 \rightarrow$ Nemoguće

Znači, $n = 10$, pa se radi o 10-touglu. Spoljašnji ugao je $\alpha_1 = \dfrac{360^o}{n} = \dfrac{360^o}{10^o} = 36^o$

Sada ćemo naći unutrašnji ugao:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^o$$
$$\alpha = 180^o - \alpha_1$$
$$\alpha = 180^o - 36^o$$
$$\alpha = 144^o$$

**3) Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 2, tada se centralni ugao smanji za $6^o$. Odrediti broj dijagonala mnogougla.**

**Rešenje:**

Neka je n-broj stranica tog mnogougla i $\varphi -$ centralni mnogougao. $\left(\varphi = \frac{360^o}{n}\right)$

$\rightarrow$ Ako se broj stranica poveća za 2 tada je centralni ugao $\varphi_1 = \frac{360^o}{n+2}$

$$\varphi - \varphi_1 = 6$$

$$\frac{360^o}{n} - \frac{360^o}{n+2} = 6 \rightarrow \text{ Sve pomnožimo sa } n(n+2)$$

$$360^o(n+2) - 360^o n = 6n(n+2) \rightarrow \text{ Sredimo i dobijamo kvadratnu:}$$

$$n^2 + 2n - 120 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm 22}{2}$$

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -12 \rightarrow \text{ nemoguće}$$

Dakle, broj stranica je n=10

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$D_{10} = \frac{10(10-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$$

**4) Za koliko se povećava zbir unutrašnjih uglova mnogougla, ako se broj stranica poveća za 5?**

**Rešenje:**

Zbir unutrašnjih uglova se nalazi po formuli $S_n = (n-2) \cdot 180^o$

$$\begin{aligned} S_{n+5} - S_n &= (n+5-2) \cdot 180^o - (n-2) \cdot 180^o \\ &= (n+3) \cdot 180^o - (n-2) \cdot 180^o \\ &= n \cdot 180^o + 3 \cdot 180^o - n \cdot 180^o + 2 \cdot 180^o \\ &= 540^o + 360^o \\ &= 900^o \end{aligned}$$

Dakle, zbir unutrašnjih uglova se poveća za $900^o$

**5) Ako se broj stranica mnogougla poveća za 11, onda se broj njegovih dijagonala poveća za 1991. Odrediti zbir unutrašnjih uglova tog mnogougla.**

**Rešenje:**

n→ broj stranica

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2} \to \text{ broj dijagonala}$$

$$n+11 \to \text{ novi broj stranica}$$

$$D_{n+11} = \frac{(n+11)(n+11-3)}{2} = \frac{(n+11)(n+8)}{2} \to \text{novi broj dijagonala}$$

$$D_{n+11} - D_n = 1991$$

$$\frac{(n+11)(n+8)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 1991 \to \text{ sve pomnožimo sa 2}$$

$$n^2 + 8n + 11n + 88 - n^2 + 3n = 3982$$

$$22n = 3982 - 88$$

$$22n = 3894$$

$$n = 177$$

$$S_n = (n-2) \cdot 180^o$$

$$S_{177} = (177-2) \cdot 180^o$$

$$S_{177} = 31500^o$$

**6) Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za dva njegov se ugao poveća za $9^o$. Odrediti broj stranica mnogougla .**

**Rešenje:**

Neka je n-broj stranica i $\alpha$ unutrašnji ugao tog mnogougla. $\alpha = \frac{S_n}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180^o}{n}$

Ako se broj stranica poveća za 2, biće ih n+2 i $\alpha = \frac{S_{n+2}}{n+2} = \frac{(n-2+2)\cdot 180^o}{n+2} = \frac{n\cdot 180^o}{n+2}$

__**Tada je:**__

$$\frac{180^o n}{n+2} - \frac{(n-2)\cdot 180^o}{n} = 9 \rightarrow \text{ pomnožimo sve sa } n(n-2)$$
$$180^o n^2 - (n-2)(n+2)\cdot 180^o = 9n(n+2)$$
$$180^o n^2 - n^2 180^o + 4\cdot 180^o = 9n(n+2)$$
$$9n(n+2) = 720 \rightarrow \text{ podelimo sa } 9$$
$$n(n+2) = 80$$
$$n^2 + 2n - 80 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm 18}{2}$$
$$n_1 = 8$$
$$n_2 = -10 \rightarrow \text{ nemoguće}$$

Dakle n=8 , mnogougao ima ima 8 stranica.

**7) Broj dijagonala konveksnog mnogougla u ravni jednak je petostrukom broju njegovih stranica. Izračunati broj stranica mnogougla.**

**<u>Rešenje:</u>**

Kako je $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ to će biti:

$$D_n = 5n$$
$$\frac{n(n-3)}{2} = 5n \rightarrow \text{ pomnožimo sa 2}$$
$$n(n-3) = 10n$$
$$n^2 - 3n - 10n = 0$$
$$n^2 - 13n = 0$$
$$n(n-13) = 0$$
$$\underset{nemoguće}{n=0} \quad \text{ili} \quad n = 13$$

Dakle $n = 13$

**8) Koji pravilan mnogougao ima 44 dijagonale?**

**<u>Rešenje:</u>**

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$
$$\frac{n(n-3)}{2} = 44$$
$$n(n-3) = 88$$
$$n^2 + 2n - 88 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{3 \pm 19}{2}$$
$$n_1 = 11$$
$$n_2 = -8 \rightarrow \text{ nemoguće}$$

Dakle n=11

**9) Oko kruga poluprečnika $r=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ opisan je pravilan osmougao. Nadji površinu tog osmougla.**

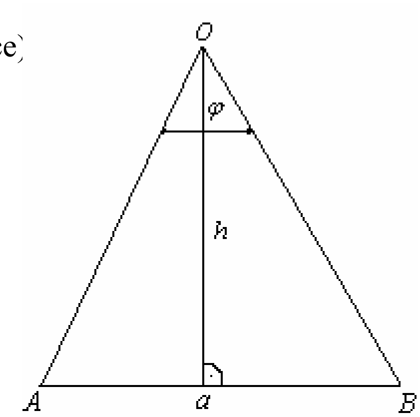
**<u>Rešenje:</u>**

Pravilan osmougao se sastoji iz 8 podudarhih jednakih trouglova. Izvučemo jedan taj karakteristični trougao.

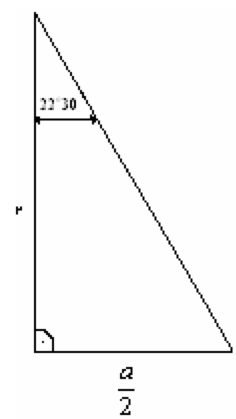
$h=r$ ( visina je ista kao i poluprečnik upisane kružnice)

Njegov centralni ugao je $\varphi=\frac{360^o}{n}=\frac{360^o}{8}=45^o \Rightarrow$

Pošto nama treba pola ovog ugla, imamo: $\frac{\varphi}{2}=22^o30'$




Iz ovog trougla je:




$$tg22^o30'=\frac{\frac{a}{2}}{r}$$ pa je odatle

$$a=2rtg22^o30'$$

$$P=8\cdot\frac{a\cdot h}{2}=4ah=4\cdot 2r\cdot r\cdot tg22^o30'$$
$$P=8r^2tg22^o30'$$

$$tg22^o30'=tg\frac{45^o}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{1+\cos 45^o}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$tg22^o30'=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$ Racionališemo…

$$tg22^o30^{'} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})}{4-2}}$$

$$tg22^o30^{'} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}$$

Tako da je sad:

$$P = 8r^2 tg22^o30^{'}$$

$$P = 8 \cdot \left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$P = \cancel{8} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}$$

"skratimo" 8 i 2 sa 2

$$P = 4\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$P = 4\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2\right)$$

$$P = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$P = 4 \cdot 2$$

$$P = 8$$