GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA (II deo)

U prethodnom fajlu (grafici trigonometrijskih funkcija I deo) smo proučili kako se crtaju grafici u zavisnosti od brojeva *a,b* i *c*. Sada možemo sklopiti i ceo grafik funkcije $y = a\sin(bx + c)$.

POSTUPAK:

i) **Nacrtamo grafik funkcije *y = sinx***

ii) **Uočimo brojeve *a,b* i *c* , i nađemo periodu** $T = \frac{2\pi}{b}$**. Crtamo grafik** $y = \sin bx$ **.**

iii) **Odredimo vrednost izraza** $\frac{c}{b}$ **i vršimo pomeranje po x osi, to jest crtamo grafik** $y = \sin(bx + c)$

iv) **Vrednost amplitude *a* nam pomaže da nacrtamo konačan grafik** $y = a\sin(bx + c)$

Ovo je jedan način za crtanje grafika. Drugi način je direktno ispitivanje značajnih tačaka, a već smo vam pomenuli da ovde morate znati rešavati trigonometrijske jednačine.(Imate taj fajl, pa se malo podsetite...)

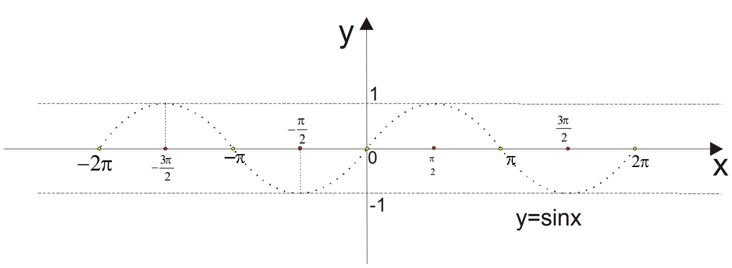
primer 1. Nacrtaj grafik funkcije: $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$

<u>Rešenje</u>

<u>I način</u>

Iz $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ je $a = 3, b = 2, c = \frac{\pi}{4}$

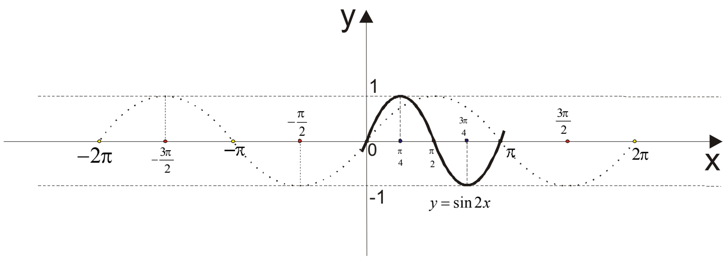
Crtamo prvo grafik osnovne funkcije $y = \sin x$.



slika 1.

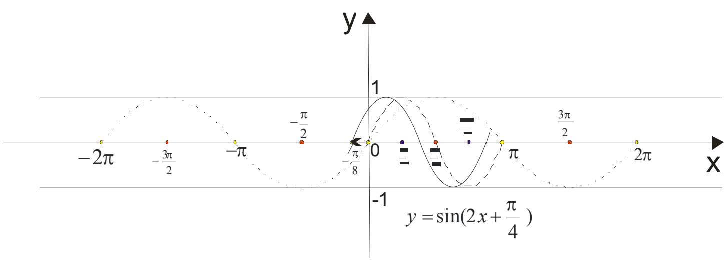
Nadjemo periodu : $T = \frac{2\pi}{b} \to T = \frac{2\pi}{2} \to \boxed{T = \pi}$

Dalje crtamo grafik funkcije $y = \sin 2x$



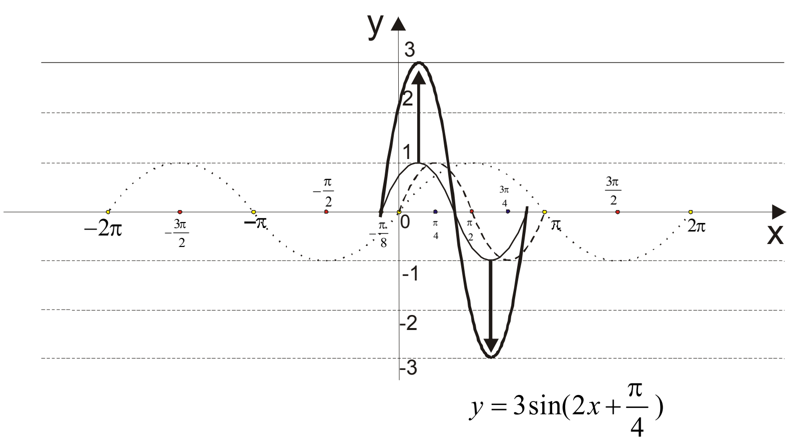
slika 2.

Vrednost izraza $\frac{c}{b}$ je $\frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$. Vršimo pomeranje grafika $y = \sin 2x$ za $\frac{\pi}{8}$ **ulevo**:



slika 3.

I konačno, kako je amplituda $a = 3$, to nam govori na “razvučemo” grafik izmedju -3 i 3 duž y ose.



slika 4.

II način

Zapišemo vrednosti za *a,b* i *c*. Nadjemo periodu $T = \frac{2\pi}{b}$.

Ispitujemo gde su nule funkcije.

Tražimo tačke ekstremuma (maksimum i minimum).

$a = 3, b = 2, c = \frac{\pi}{4}$ i $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} \rightarrow \boxed{T = \pi}$

Nule funkcije

To su mesta gde grafik seče x osu.

$y = 0$

$3\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \to 2x + \frac{\pi}{4} = 0 \vee 2x + \frac{\pi}{4} = \pi$

$2x + \frac{\pi}{4} = 0$

$2x = -\frac{\pi}{4} \to \boxed{x = -\frac{\pi}{8}}$ Ovde sada dodamo periodu(T=π): $\boxed{x = -\frac{\pi}{8} + k\pi}$ $k \in Z$

$2x + \frac{\pi}{4} = \pi$

$2x = \frac{3\pi}{4} \to \boxed{x = \frac{3\pi}{8}} \to \boxed{x = \frac{3\pi}{8} + k\pi}$ $k \in Z$

Ove tačke nalazimo na x osi .

Maksimum

Kako je amplituda $a = 3$, funkcija će imati maksimalnu vrednost za *y=3*.

$y = 3$

$3\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 3$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1 \to 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \to 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \to 2x = \frac{\pi}{4} \to \boxed{x = \frac{\pi}{8}}$

I ovde moramo dodati periodu: $\boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\pi}$ $k \in Z$

Minimum

Funkcija će imati minimalnu vrednost za *y =-3*

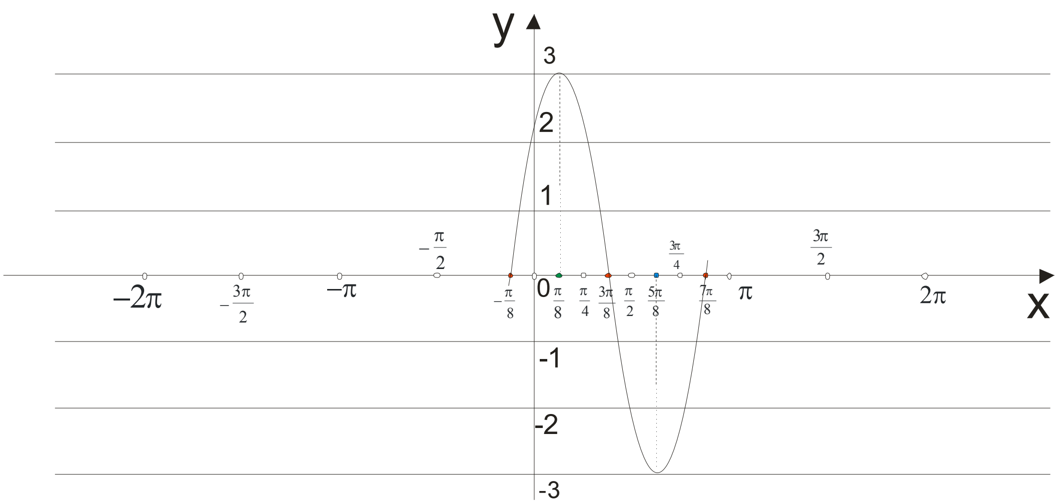
$y = -3$

$3\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -3$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -1 \to 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \to 2x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \to 2x = \frac{5\pi}{4} \to \boxed{x = \frac{5\pi}{8}}$

Dodajemo periodu: $\boxed{x = \frac{5\pi}{8} + k\pi}$ $k \in Z$

Sada sklopimo grafik:



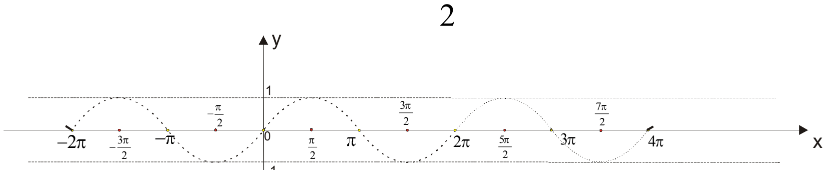
$$y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

Vidite i sami da ovaj drugi način daje precizniji grafik, ali mora se vladati rešavanjem jednačina.

Vi konstruišite grafik kako vaš profesor komanduje...

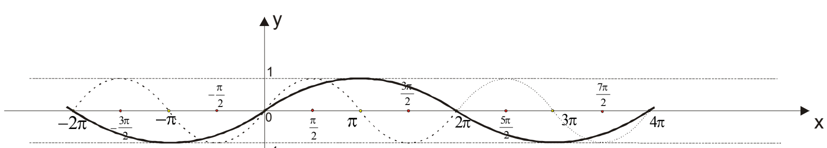
$\boxed{\text{primer 2.}}$ Nacrtaj grafik funkcije: $y = -2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

$$a = -2, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{6} \to T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \text{ dakle } \boxed{T = 4\pi} \text{ i } \frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}, \text{dakle } \boxed{\frac{c}{b} = \frac{\pi}{3}}$$



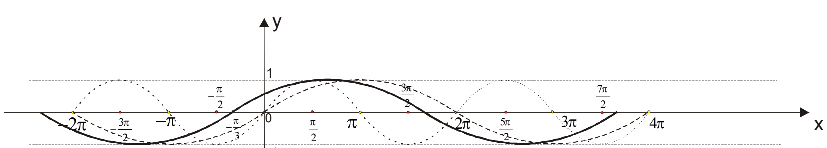
$y = \sin x$

slika 1.



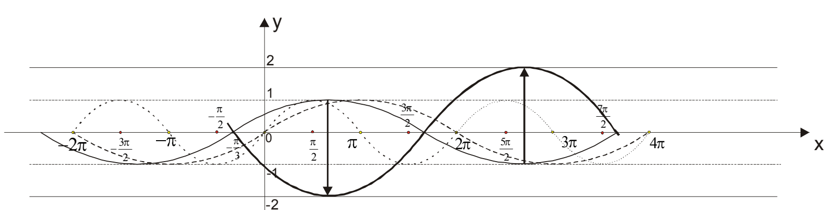
$y = \sin\frac{1}{2}x$

slika 2.



$y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

slika 3.



$y = -2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

slika 4.

Ako bi radili preko ispitivanja :

Nule funkcije

$$y = 0$$

$$-2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = 0 \to \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = 0 \vee \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = \pi$$

$\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = 0 \to \boxed{x = -\frac{\pi}{3}}$ i kad dodamo periodu: $\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi}$

$\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = \pi \to \boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$ kad dodamo periodu: $\boxed{x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi}$

Maksimum

$$y = 2$$

$$-2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = 2$$

$$\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = -1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{8\pi}{6}$$

$x = \frac{8\pi}{3}$ dodamo periodu $\boxed{x = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi}$

Minimum

$$y = -2$$

$$-2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = -2$$

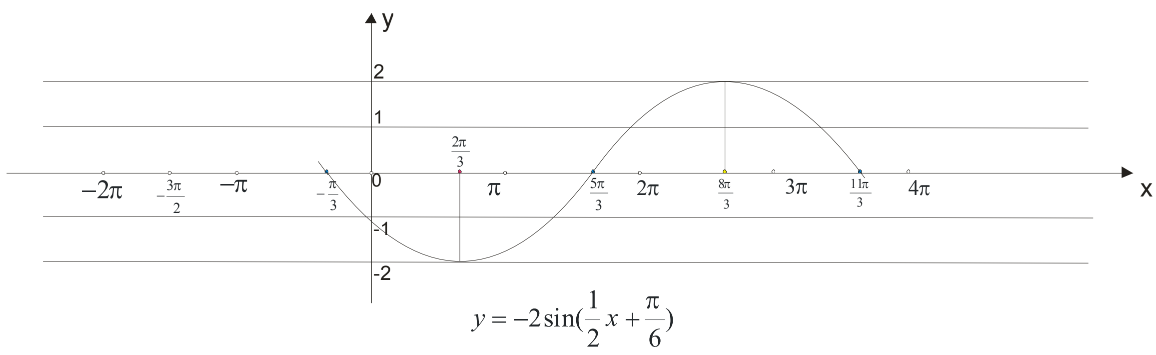
$$\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{2\pi}{6}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \to \boxed{x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi}$$

Da sklopimo grafik:



$\boxed{\text{primer 3.}}$ Nacrtaj grafik funkcije: $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{4})$

Grafik ove funkcije se konstruiše na isti način kao i za sinusnu funkciju. Razlika je jedino u tome što je

početni grafik $y = \cos x$

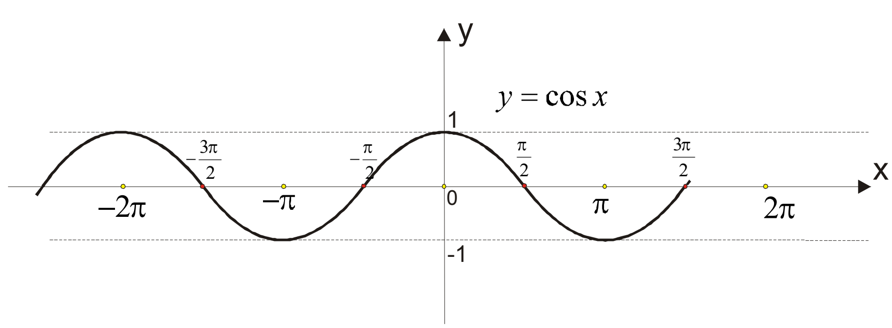
Za $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{4})$ je:

$$a = 2, b = 2, c = \frac{\pi}{4}$$

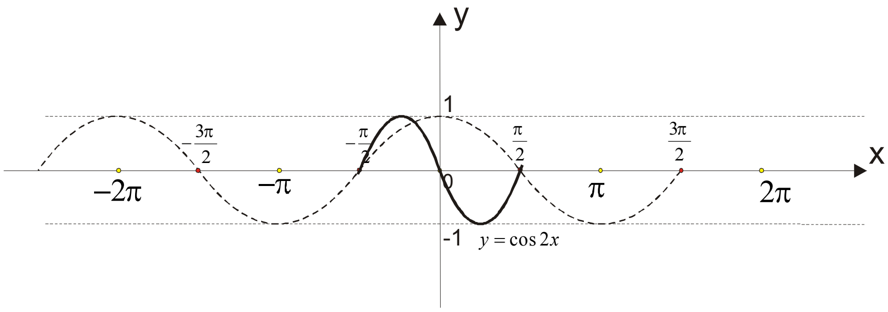
$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi \to \boxed{T = \pi}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8} \to \boxed{\frac{c}{b} = \frac{\pi}{8}}$$

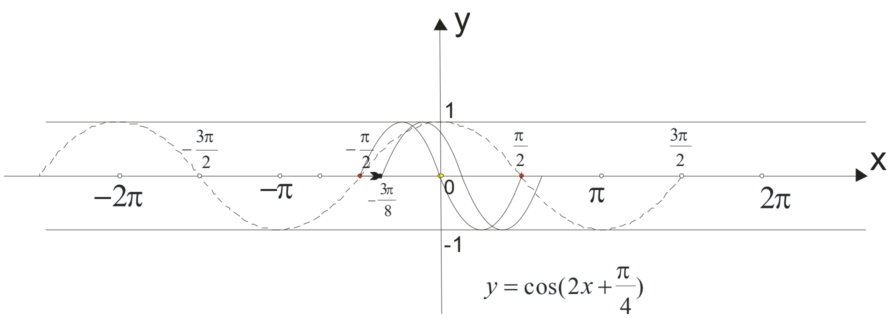
Krećemo od grafika $y = \cos x$:



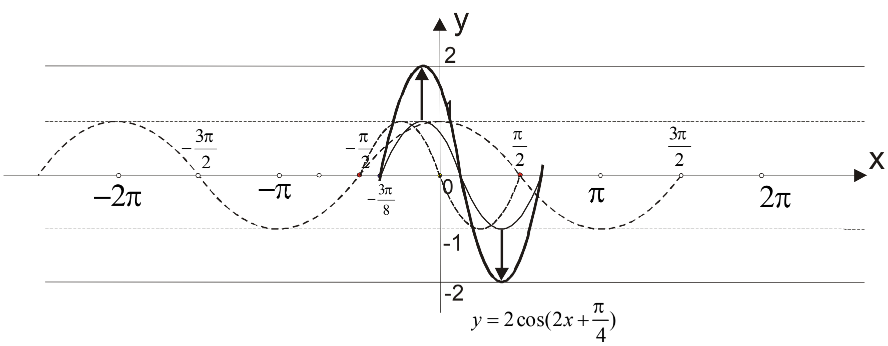
Dalje crtamo grafik $y = \cos 2x$, to jest smanjujemo periodu na π .



Kako je $\frac{c}{b}=\frac{\pi}{8}$, vršimo pomeranje ovog grafika za $\frac{\pi}{8}$ udesno:



Amplituda je $a=2$, pa " raširimo" grafik izmedju -2 i 2 po y osi.



Evo konačnog grafika.

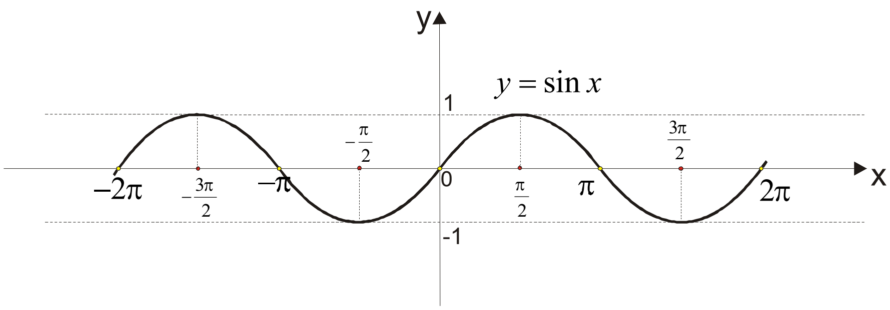
$\boxed{\text{primer 4.}}$ Nacrtaj grafik funkcije: $y=\sin x+1$

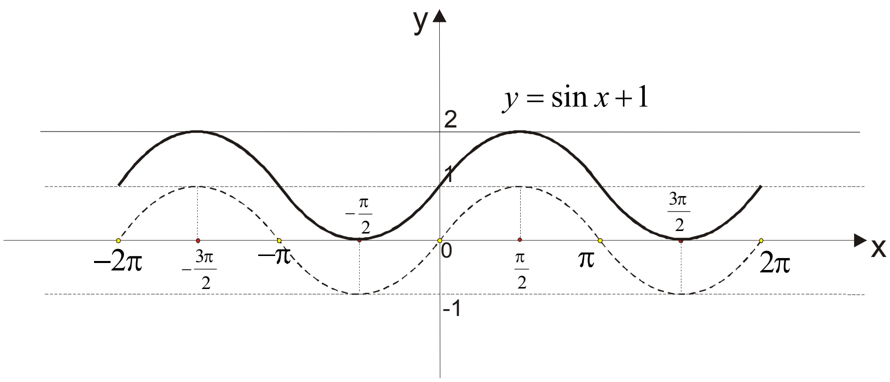
Ovakvu situaciju do sada nismo imali... Ali smo nešto slično radili kod kvadratne funkcije (pogledaj taj fajl).

Broj « van » sinusa nam ustvari predstavlja pomeranje po y-osi!

Ako je taj broj pozitivan grafik se pomera "na gore" a ako je taj broj negativan , grafik se za toliko pomera "na dole".

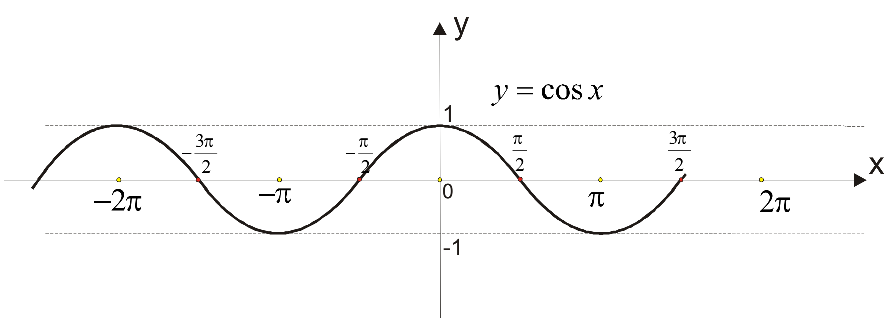
Ovde imamo +1, pa ćemo nacrtati grafik funkcije $y=\sin x$ i ceo grafik podići za 1 na gore.

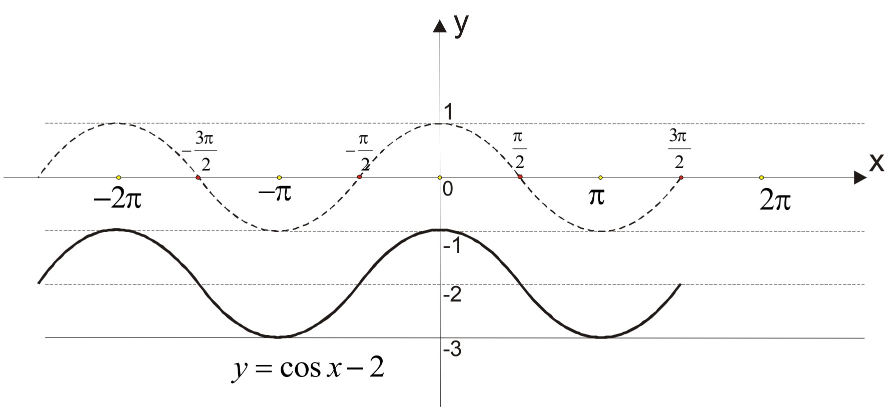




$\boxed{\text{primer 5.}}$ Nacrtaj grafik funkcije: $y=\cos x-2$

Crtamo grafik $y=\cos x$ pa ga "spustimo" za 2 na dole po y osi!





$\boxed{\text{primer 6.}}$ Nacrtaj grafik funkcije: $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Rešenje:

Ovde nam je prvi posao da " spakujemo" funkciju na oblik $y=a\sin(bx+c)$ ili $y=a\cos(bx+c)$.

Ovde moramo koristiti formulice iz trigonometrije, a ima i nekih trikova...

$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ kao trik dodamo $\frac{2}{2}$

$y=\frac{2}{2}\sin x-\frac{2}{2}\sqrt{3}\cos x \rightarrow$ sad uzmemo 2 ispred zagrade

$y=2(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) \rightarrow$ znamo da je $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ i $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, zamenimo ...

$y=2(\ \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x) \rightarrow$ malo pretumbamo....

$y=2(\ \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}) \rightarrow$ ovo u zagradi je formula $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$$\boxed{y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})}$$

Znači, zadatu funkciju $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ smo sveli na oblik $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$ koji znamo da konstruišemo. Ostavljamo vama za trening da probate sami da je konstruišete.

$\boxed{\text{primer 7.}}$ Nacrtaj grafik funkcije: $y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\cos(2x-\frac{3\pi}{4})$

Rešenje:

I ovde imamo zeznutu situaciju. Najpre moramo prebaciti kosinus u sinus preko formulice za vezu trigonometrijskih funkcija u I kvadrantu:

$$\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\cos(2x-\frac{3\pi}{4})$$

$$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\sin[\frac{\pi}{2}-(2x-\frac{3\pi}{4})]$$

$$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\sin[\frac{\pi}{2}-2x+\frac{3\pi}{4}]$$

$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{5\pi}{4}-2x)\rightarrow$ dalje koristimo formulicu: $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$$y=2\sin\frac{2x-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}-2x}{2}\cdot\cos\frac{2x-\frac{\pi}{4}-(\frac{5\pi}{4}-2x)}{2}$$

$$y=2\sin\frac{\cancel{2x}-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}-\cancel{2x}}{2}\cdot\cos\frac{2x-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}+2x}{2}$$

$y=2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{4x-\frac{3\pi}{2}}{2}\rightarrow$ znamo da je $\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$y=2\cdot 1\cdot\cos(\frac{4x}{2}-\frac{\frac{3\pi}{2}}{2})$$

$$\boxed{y=2\cdot\cos(2x-\frac{3\pi}{4})}$$

I ovo je za trening...Ako se ne snalazite, pošaljite nam mejl pa ćemo probati da vam pomognemo, nekako.