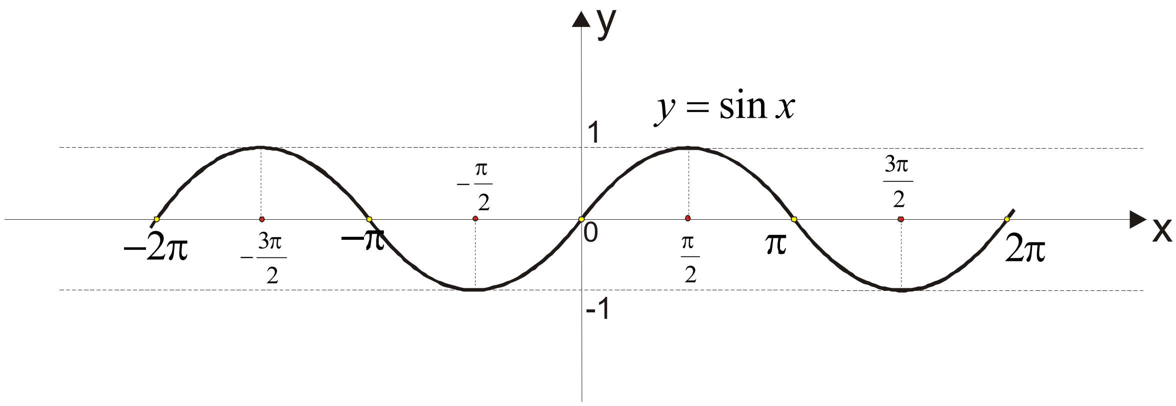
GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA (I deo)

$$\boxed{y = a\sin(bx + c)}$$

Da se najpre podsetimo osnovnog grafika funkcije *y = sinx* i njenih osobina.



<u>Osobine:</u>

- funkcija je definisana za svako x, to jest $x \in (-\infty, \infty)$
- skup vrednosti funkcije je interval $[-1,1]$, to jest funkcija je ograničena $-1 \le \sin x \le 1$
- sinx je periodična funkcija sa osnovnom periodom 2π
- **nule funkcije** (mesta gde grafik seče x osu) su $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi...$ ili ovo možemo zapisati , uzimajući u obzir periodičnost kao $x = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- **maksimalne vrednosti** funkcije su u $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$ to jest, možemo zapisati: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$
- **minimalne vrednosti** funkcije su u $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, ...$ to jest , možemo zapisati: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$
- *sinx* **raste** u intervalima $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $\quad$ k $\in$ Z
- *sinx* **opada** u intervalima $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $\quad$ k $\in$ Z
- funkcija je **pozitivna**, *sinx > 0* za $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad$ k $\in$ Z
- funkcija je **negativna**, *sinx < 0* za $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \quad$ k $\in$ Z
- grafik se zove **SINUSOIDA**

Trigonometrijsku funkciju $y = a\sin(bx + c)$ **ćemo da naučimo da crtamo na dva načina**.

Prvi način se sastoji u tome da krenemo od početnog grafika *y=sinx* i da u zavisnosti od brojeva *a,b* i *c* vršimo pomeranja grafika (naučićemo kako) a *drugi način* je direktno ispitivanje tačaka (nule funkcije, max, min...) ali za njega nam je potrebno da znamo rešavati trigonometrijske jednačine.

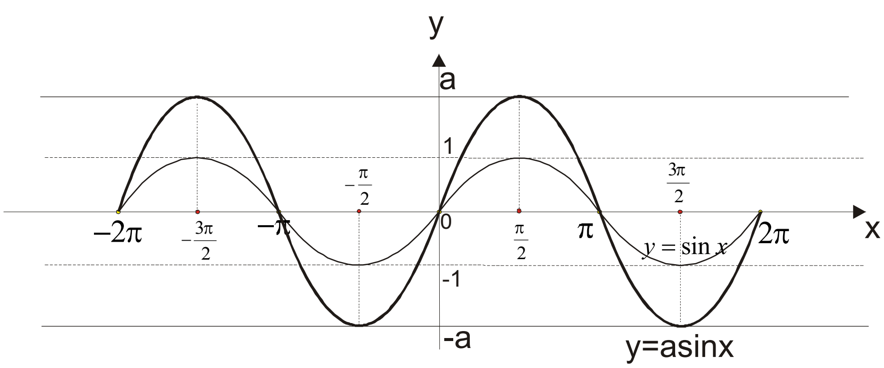
Najpre uočite i zapišete brojeve *a,b* i *c*. Svaki od njih priča neku priču...

$\boxed{y = a\sin x}$

Broj *a* koji je ispred sinusa se zove ***amplituda*** i predstavlja maksimalno rastojanje tačke grafika od x- ose.

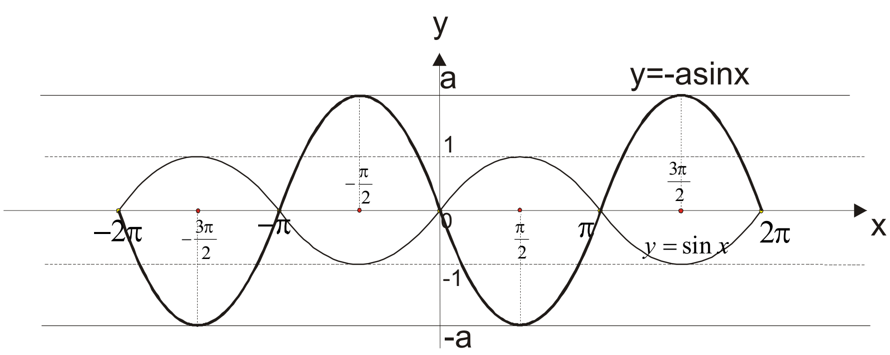
Za funkciju *y=sinx* je taj broj *a=1* a na grafiku vidimo da je ona baš ograničena sa -1 i 1.

Ako je *broj ispred sinusa* pozitivan , funkcija izgleda:



Dakle, nule funkcije ostaju na svojim mestima , dok se max i min " produže" do tačke *a*, odnosno –*a*.

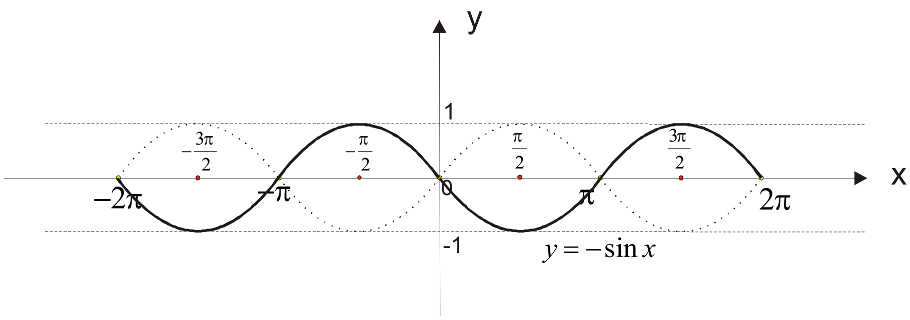
Ako je *broj ispred sinusa* negativan ,funkcija izgleda:



Ovde dakle moramo voditi računa jer se grafik " okreće", a max i min zamene mesta i produže se do tačke *a*, odnosno –*a*.

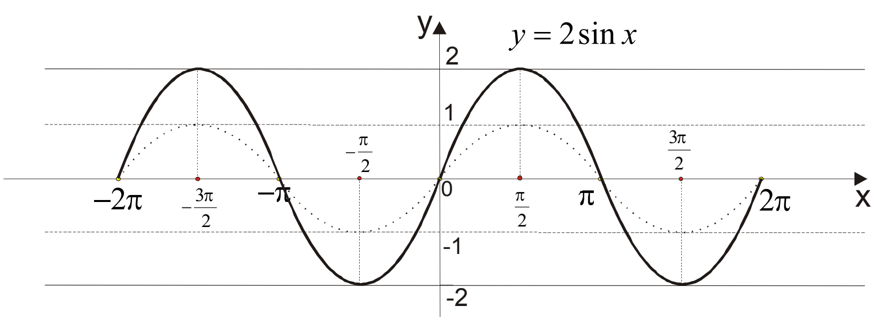
primer 1. **Nacrtati grafik funkcije** $y = -\sin x$

Ovde nam je ***a = -1*** . To nam govori da početni grafik $y = \sin x$ (koji je nacrtan na slici isprekidanom linijom) samo “ okrenemo”.



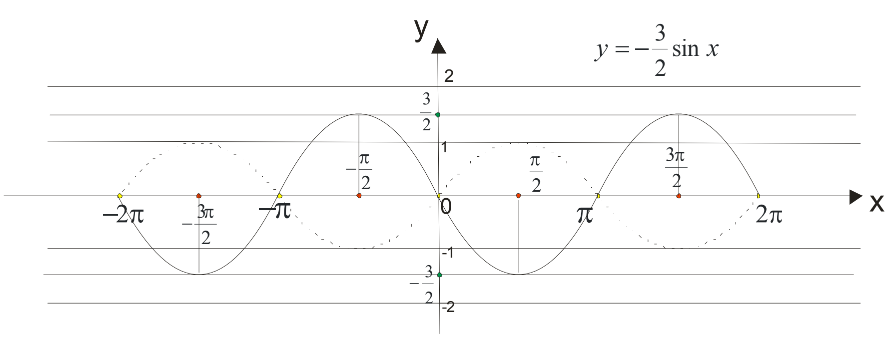
primer 2. **Nacrtati grafik funkcije** $y = 2\sin x$

Sada je ***a = 2***. To znači da funkcija po y- osi ide od -2 do 2 i da se grafik ne okreće.



primer 3. **Nacrtati grafik funkcije** $y = -\frac{3}{2}\sin x$

Vidimo da je $a = -\frac{3}{2}$. Grafik je u odnosu na početni okrenut, zbog minusa i nalazi se, gledajući po y osi , između $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.



$\boxed{y = \sin bx}$

Periodičnost funkcije $y = a\sin(bx + c)$ direktno sledi iz periodičnosti funkcije *y=sinx.*

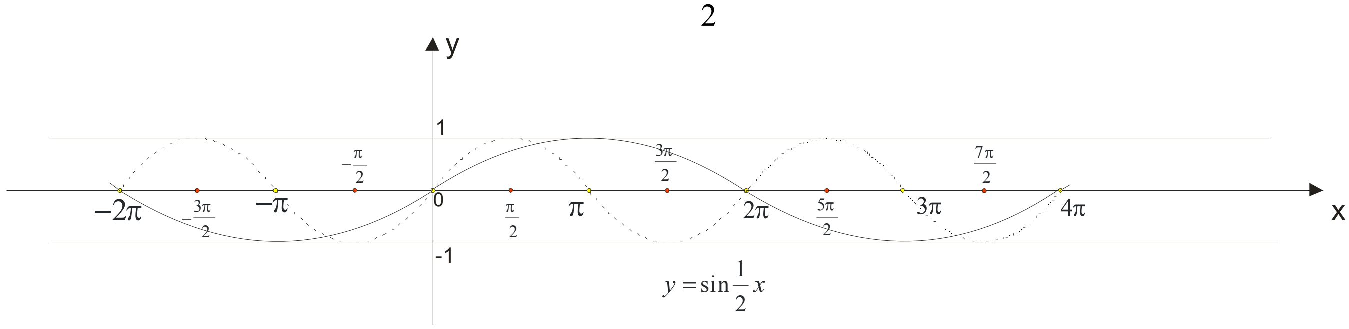
Osnovni period za $y = a\sin(bx + c)$ **se računa po formuli** $\boxed{T = \frac{2\pi}{b}}$.

Broj b se zove *frekvencija* ili *učestalost* i pokazuje koliko se celih talasa nalazi na intervalu $[0, 2\pi]$

Dakle, naš poso je da uočimo broj *b,* i ubacimo ga u formulu $T = \frac{2\pi}{b}$ da bi dobili osnovnu periodu.

<u>primer 4.</u> **Nacrtati grafik funkcije** $y = \sin\frac{1}{2}x$

Uočimo da je ovde $b = \frac{1}{2}$. Onda je $T = \frac{2\pi}{b} \to T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \to \boxed{T = 4\pi}$

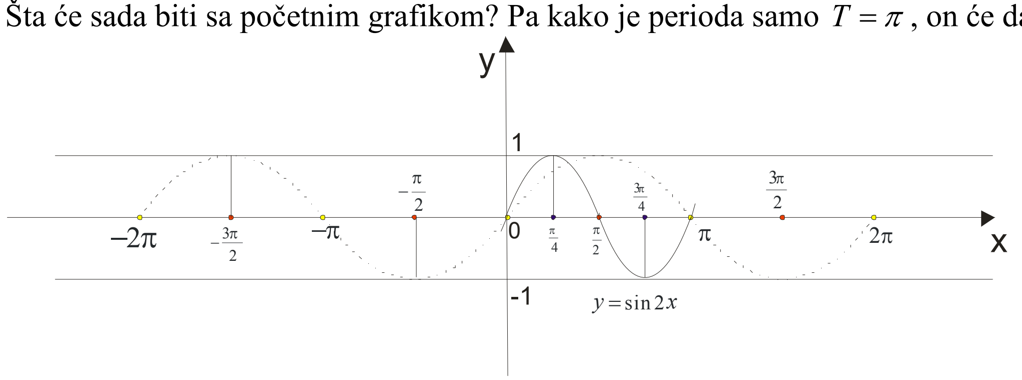


Početna funkcija $y = sinx$ je i ovde data isprekidano. Šta se desilo sa njom? Vidimo da se ona izdužila, jer je sada perioda $T = 4\pi$.

<u>primer 5.</u> **Nacrtati grafik funkcije** $y = \sin 2x$

Kako je $b = 2$ onda će osnovna perioda biti $T = \frac{2\pi}{b} \to T = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \to \boxed{T = \pi}$

Šta će sada biti sa početnim grafikom? Pa kako je perioda samo $T = \pi$, on će da se " skupi":



$\boxed{y = \sin(x + c)}$ odnosno $\boxed{y = \sin(bx + c)}$ **(broj c se zove *početna faza*)**

Opet naravno, najpre iz zadate funkcije pročitamo vrednosti za b i c. Onda odredimo vrednost za $\frac{c}{b}$.

Grafik funkcije $y = \sin(bx + c)$ se dobija pomeranjem grafika $y = \sin bx$ duž x ose i to (pazi na ovo):

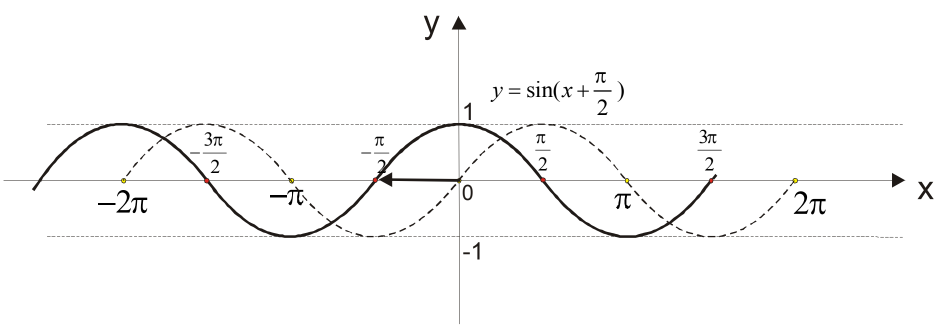
i) u pozitivnom smeru (udesno) ako je vrednost $\frac{c}{b}$ negativna

ii) u negativnom smeru (ulevo) ako je vrednost za $\frac{c}{b}$ pozitivna

<u>**primer 6.**</u> **Nacrtati grafik funkcije** $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

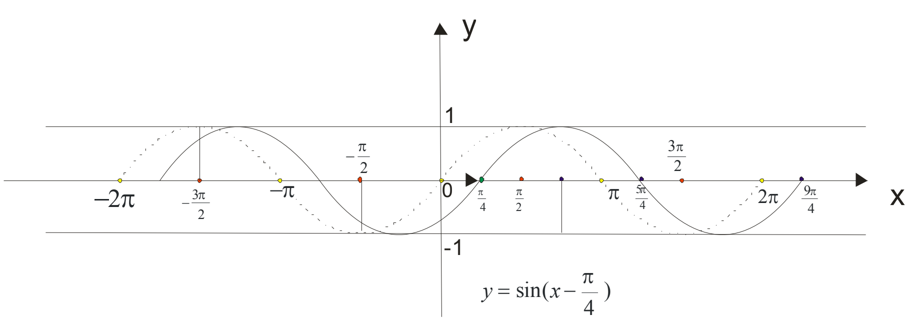
Ovde je *a=1, b=1, c=* $\frac{\pi}{2}$. Vrednost izraza $\frac{c}{b}$ **je** $\frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$. **Šta ovo znači?**

Pošto je vrednost ovog izraza pozitivna , početni grafik $y = \sin x$ pomeramo za $\frac{\pi}{2}$ ulevo.



<u>**primer 7.**</u> **Nacrtati grafik funkcije** $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$a = 1, b = 1, c = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}}$ Pomeramo grafik $\boldsymbol{y = \sin x}$ **za** $\frac{\pi}{4}$ udesno.

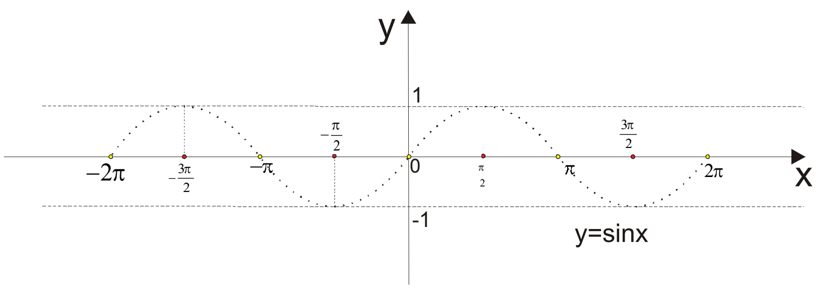


primer 8. **Nacrtati grafik funkcije** $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

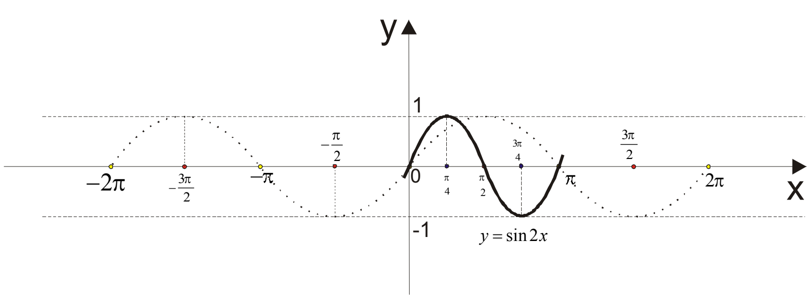
Ovde je $a=1$, $b=2$ i $c = -\frac{\pi}{2}$

Perioda je : $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \rightarrow \boxed{T = \pi}$ a vrednost izraza : $\frac{c}{b} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$

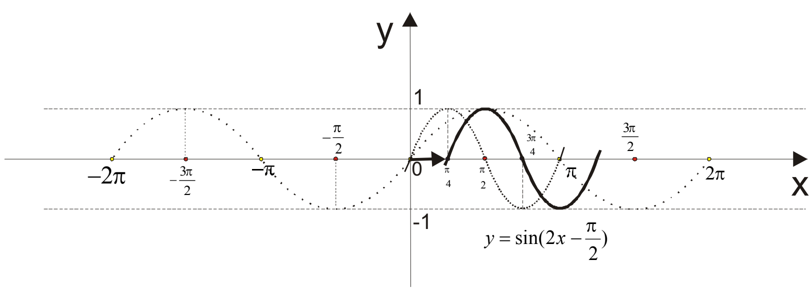
Moramo crtati **tri** grafika : $y=\sin x$ (**slika 1**.) pa onda $y=\sin 2x$ (**slika 2**.) i na kraju $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ (**slika 3**.)



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Na slici 2. vidimo da se grafik sinusne funkcije "skupio" zbog periode $T = \pi$.

Na slici 3. je izvršeno pomeranje grafika $y=\sin 2x$ za $\frac{\pi}{4}$ udesno, jer je vrednost $\frac{c}{b}$ negativna.

Verovatno će vaš profesor tražiti od vas da sva tri grafika nanosite na jednoj slici…Mi smo namerno crtali tri slike da bi bolje razumeli…

primer 9. **Nacrtati grafik funkcije** $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$

$a = 1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4}$

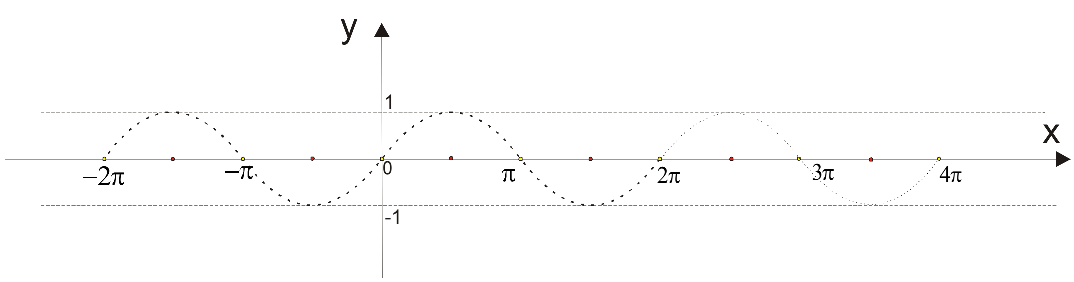
Tražimo periodu: $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{T = 4\pi}$ i vrednost izraza: $\frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Opet idu tri grafika:

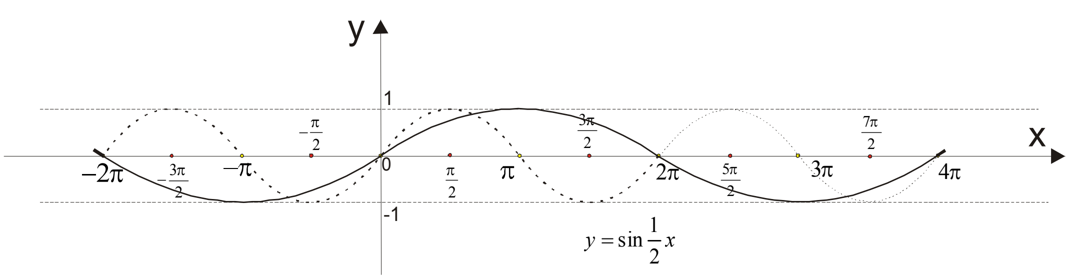
Na slici 1. je početni grafik *y = sinx*

Na slici 2. je grafik $y = \sin\frac{1}{2}x$ koji dobijamo povećavajući periodu na 4π

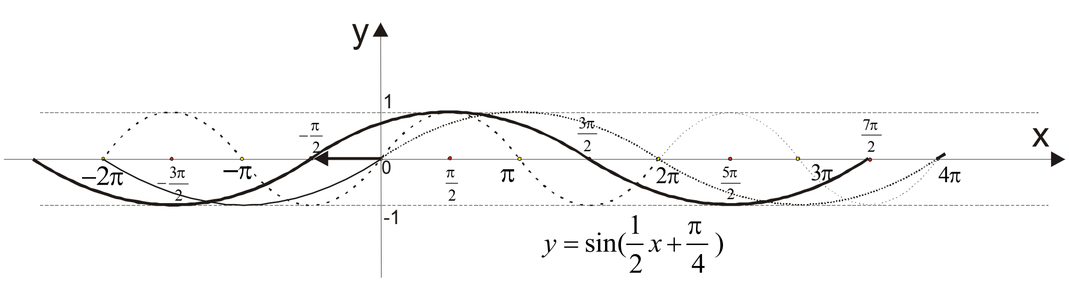
Na slici 3. je konačan grafik $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$ koji dobijamo kada grafik funkcije $y = \sin\frac{1}{2}x$ pomerimo za $\frac{\pi}{2}$ udesno, jer je vrednost izraza $\frac{c}{b}$ pozitivna.



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Sada imamo znanje da nacrtamo ceo grafik $y = a\sin(bx + c)$ **ali to pogledajte u sledećem fajlu:**

GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA (II deo)