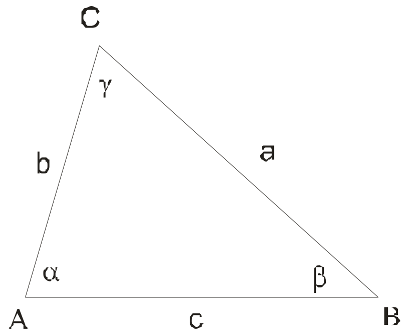
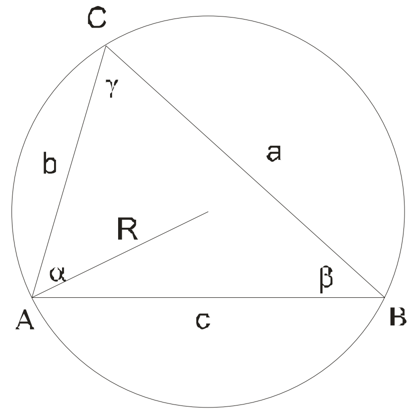
<u>SINUSNA I KOSINUSNA TEOREMA</u>
<u>REŠAVANJE TROUGLA</u>

<u>Sinusna teorema glasi:</u>

Stranice trougla proporcionalne su sinusima njima naspramnih uglova.(slika 1)





$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Odnos dužine stranica i sinusa naspramnog ugla trougla je konstanta i jednak je dužini prečnika (2R) kružnice opisane oko trougla.(slika 2)

<u>Sinusna teorema **se primenjuje:**</u>

1) **Kada su data dva ugla i jedna stranica**

2) **Kada se date dve stranice i ugao naspram jedne od tih stranica**

<u>Kosinusna teorema glasi:</u>

Neka su *a,b,c* dužine stranica i α,β,γ **veličine odgovarajućih unutrašnjih uglova trougla ABC. Tada je:**

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Kosinusna teorema <u>**se primenjuje:**</u>

1) **Kad su date dve stranice i ugao izmedju njih**

2) **Kad su date sve tri stranice trougla**

Još neke važne "stvari" koje se izvode iz sinusne i kosinusne teoreme su:

→ **Površina trougla je**: $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$

$$P=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

→ **Površina trougla je** $P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$, **R je poluprečnik opisane kružnice i** $P=r\cdot s$ **gde je** $s=\frac{a+b+c}{2}$ **poluobim a r je poluprečnik upisane kružnice**

→ **Težišne linije se izračunavaju:**

$$t_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$$

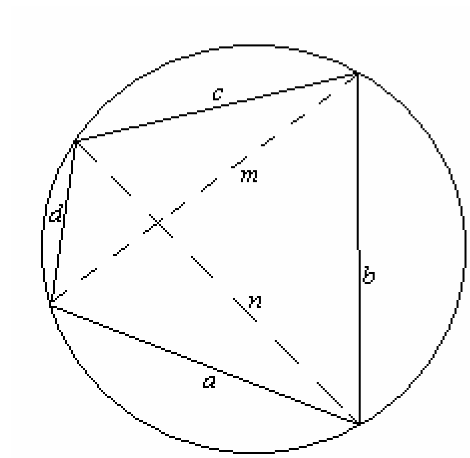
$$t_b=\frac{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{2}$$

$$t_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

→ **Proizvod dijagonala tetivnog četvorougla (oko koga može da se opiše kružnica) jednak je zbiru proizvoda naspramnih strana.**

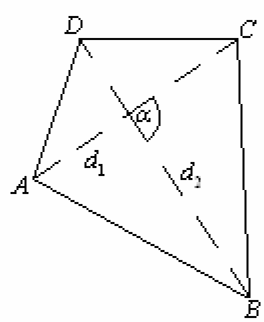
$$m\cdot n=ac+bd$$

Ptolomejeva teorema



→ **Ako su** d_1 **i** d_2 **dijagonalne konveksnog četvorougla i α ugao koji one grade. Površina tog četvorougla je:**

$$P=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\sin\alpha$$



Primeri

1) U trouglu ABC dato je $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$ i poluprečnik opisanog kruga $R = 2\sqrt{6}$. Odrediti ostale osnovne elemente bez upotrebe tablica.

$$\alpha = 45^o$$
$$\beta = 60^o$$
$$R = 2\sqrt{6}$$

Najpre ćemo naći ugao γ

$$\alpha + \beta + je = 180^o$$
$$\gamma = 180^o - (45^o + 60^o)$$
$$\gamma = 75^o$$

Iskoristićemo sinusnu teoremu $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \quad a = 2R\sin\alpha$$
$$a = 2\cdot 2\sqrt{6}\sin 45^o$$
$$a = 4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$
$$a = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow \quad b = 2R\sin\beta$$
$$b = 2\cdot 2\sqrt{6}\sin 60^o$$
$$b = 4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{3}$$
$$b = 6\sqrt{3}$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \quad c = 2R\sin je$$
$$c = 2\cdot R\sqrt{6}\sin 75^o$$
$$c = 4\sqrt{6}\cdot\sin(45^o + 30^o)$$
$$c = 4\sqrt{6}\cdot(\sin 45^o\cos 30^o + \cos 45^o\sin 30^o)$$
$$c = 4\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\right)$$
$$c = 2\left(3+\sqrt{3}\right)$$

2) Odrediti stranicu *b* trougla ABC ako su njegove stranice $a = 2\sqrt{3}cm, c = \sqrt{6}cm$ **i ugao** $\beta = 105^0$

$$
\begin{aligned}
&a = 2\sqrt{3}cm \\
&c = \sqrt{6}cm \\
&\beta = 105^o \\
\hline
&b = ?
\end{aligned}
$$

Ovde ćemo upotrebiti kosinusnu teoremu!

Od tri jednakosti izaberemo onu u koju imamo najviše podataka da zamenimo.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Ajmo prvo da nadjemo $\cos 105^o$

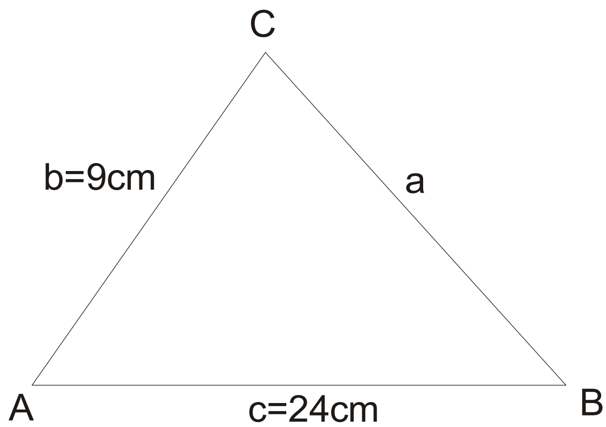
$$
\begin{aligned}
\cos 105^o &= \cos(60^o + 45^o) \\
&= \cos 60^o \cos 45^o - \sin 60^o \sin 45^o \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}
\end{aligned}
$$

Sad kosinusna teorema:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\
b^2 &= 12 + 6 - 6(1-\sqrt{3}) \\
b^2 &= 12 + 6 - 6 + 6\sqrt{3} \\
b^2 &= 12 + 6\sqrt{3} \rightarrow \textit{mali trik} \\
b^2 &= (3+\sqrt{3})^2 \\
b &= 3 + \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 + 6\sqrt{3} &= (3+\sqrt{3})^2 \rightarrow \textit{proverimo} \\
&= 3^2 + 2\cdot 3\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\
&= 9 + 6\sqrt{3} + 3 \\
&= 12 + 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

3) U trouglu ABC dato je AB=24cm, AC=9cm i ugao $\alpha = 60^0$. Odrediti bez upotreba tablica, stranicu BC i poluprečnik opisane kružnice.



$$b = 9cm$$
$$c = 24cm$$
$$\alpha = 60^o$$
$$a = ?, R = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = 9^2 + 24^2 - 2\cdot 9\cdot 24\cdot \cos 60^o$$
$$a^2 = 81 + 576 - 2\cdot 9\cdot 24\cdot \frac{1}{2}$$
$$a^2 = 441$$
$$a = \sqrt{441}$$
$$a = 21cm$$

Sad iskoristimo sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{21}{\sin 60^o} = 2R$$
$$\frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$
$$2R = \frac{42}{\sqrt{3}}$$
$$R = \frac{21}{\sqrt{3}} \textit{racionališemo}$$
$$R = \frac{21}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$R = \frac{21\sqrt{3}}{3}$$
$$R = 7\sqrt{3}cm$$

4) U trouglu ABC razlika stranica a i b jednaka je 3cm ugao $\gamma = 60^0$ i poluprečnik opisane kružnice $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} cm$. Odrediti stranice trougla ABC.

$$a - b = 3cm$$
$$\gamma = 60^o$$
$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$
$$\overline{}$$
$$a, b, c = ?$$

Iskoristimo sinusnu teoremu da nadjemo dužinu stranice c.

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \quad c = 2R\sin\gamma$$
$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60^o$$
$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$c = 7cm$$

Dalje koristimo kosinusnu teoremu:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\cos 60^o$$
$$49 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3) \cdot \frac{1}{2}$$
$$49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - b^2 - 3b$$

$b^2 + 3b - 40 = 0 \rightarrow$ kvadratna jednačina ‘’po b’’

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$
$$b_1 = 5$$

$b_2 = -8 \rightarrow$ ovo nije rešenje jer ne može dužina stranice da bude negativan broj.

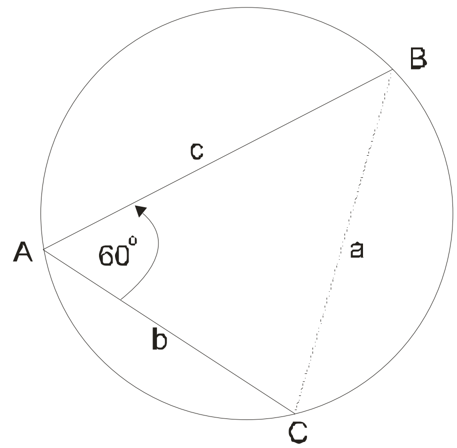
Dakle $b = 5$

$$a = b + 3$$
$$a = 5 + 3$$
$$a = 8$$

5) U krugu su date tetive AB=8cm i AC=5cm. One grade medjusobni ugao $\alpha = 60^0$.

Izračunati poluprečnik opisane kružnice.

Rešenje:



$$b = 5cm$$
$$c = 8cm$$
$$\alpha = 60^o$$
$$R = ?$$

Najpre iz kosinusne teoreme nadjemo dužinu stranice *a.*

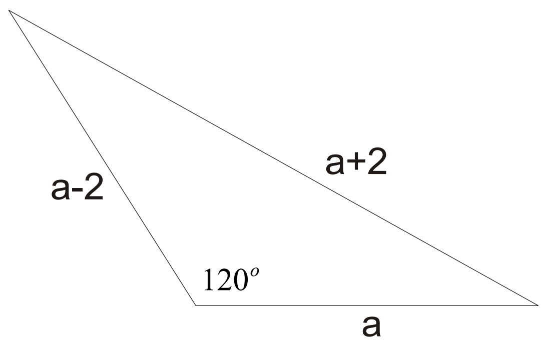
$$a = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 60^o$$
$$a^2 = 25 + 64 - 2\cdot 40\cdot \frac{1}{2}$$
$$a^2 = 89 - 40$$
$$a^2 = 49$$
$$a = 7cm$$

Iz sinusne teoreme nadjemo traženo R.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{7}{\sin 60^o} = 2R$$
$$2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$$
$$R = \frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

6) Ako su stranice trougla $a-2, a, a+2$ i jedan ugao iznosi 120^0, odrediti stranice.

Rešenje:



$$a = a$$
$$b = a - 2$$
$$c = a + 2$$

Pazi: 120^o je ugao naspram najveće stranice (a+2)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2)\cos 120^o$$
$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 + a(a-2)$$
$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a$$

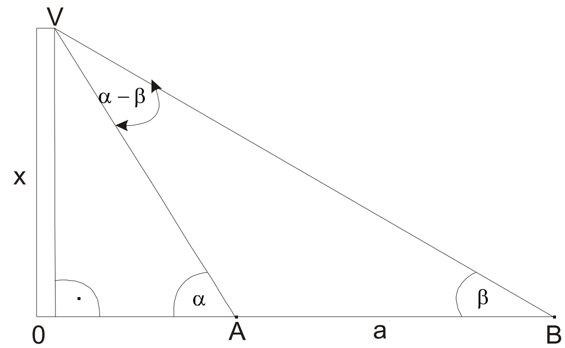
$$0 = 2a^2 - 10a$$
$$2a(a-5) = 0$$
$$a = 0 \rightarrow \text{nemoguće}$$
$$a = 5$$

Sad se vratimo da nadjemo ostale dve stranice….

$$b = a - 2 = 5 - 2 = 3$$
$$b = 3$$
$$c = a + 2$$
$$c = 7$$

7) Ozračinati visinu fabričkog dimnjaka koji se nalazi na horizontalnom nepristupačnom tlu, ako se vrh dimnjaka iz tačke A vidi pod uglom α , a iz tačke B pod uglom β. Tačke A i B pripadaju takodje horizontalnoj ravni a njihovo rastojanje AB= a. Osa dimnjaka i tačke A i B leže u istoj ravni.

Ovde je najvažnije skicirati problem!!!



Obeležimo traženu visinu sa OV= x

Prvo nadjemo nepoznate uglove $\angle OVA$ i $\angle AVB$

$$\left.\begin{aligned}\angle OVA &= 90^o - \alpha\\ \angle OVB &= 90^o - \beta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\angle AVB = \angle OVB - \angle OVA\\ &= (90^o - \beta) - (90^o - \alpha)\\ &= 90^o - \beta - 90^o + \alpha\\ &\angle AVB = \alpha - \beta\end{aligned}$$

Primenimo sinusnu teoremu na trougao ABV

$$\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AV}{\sin\beta} \Rightarrow AV = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

sad primenjujemo definiciju sinusa na pravougli trougao VOA.

$$\sin\alpha = \frac{x}{AV} \Rightarrow \quad x = AV(\sin\alpha)$$

$$x = \frac{a\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

8) U trouglu ABC dato je $a-b=1,\ h_c=\frac{3}{2}$, R=4. Bez upotreba tablica izračunati α .

$$a-b=1$$
$$h_c=\frac{3}{2}$$
$$\underline{R=4}$$
$$\alpha=?$$

Najpre ćemo upotrebiti obrasce za površinu trougla:

$$P=\frac{c\cdot h_c}{2},\quad P=\frac{abc}{4R}$$

Dakle: $\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{abc}{4R}$

$$2ab=4Rh_c$$
$$ab=2Rh_c$$
$$ab=2\cdot 4\cdot h_c$$
$$ab=2\cdot 4\cdot \frac{3}{2}$$
$$ab=12$$

Sada napravimo sistem:

$$a-b=1$$
$$\underline{ab=12}$$
$$a=b+1$$
$$b(b+1)=12$$
$$b^2+b-12=0$$
$$b_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2}$$
$$b_1=3$$
$$b_2=-4 \text{ Nemoguće}$$

Dakle $b=3\Rightarrow a=3+1=4\Rightarrow a=4$

Dalje iskoristimo sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2R}$$
$$\sin\alpha = \frac{4}{8}$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

Znamo da je $\alpha = 30^o$ jer je $\sin 30^o = \frac{1}{2}$

Rešenje je $\alpha = 30^o$

9) Odrediti stranice trougla površine $P = 3\sqrt{3}$, ako je ugao $\alpha = 60^0$ i zbir stranica koje zahvataju dati ugao b + c = 7

$$P = 3\sqrt{3}$$
$$\alpha = 60^o$$
$$b + c = 7$$
$$a, b, c = ?$$

Ovde ćemo iskoristiti obrazac za površinu trougla:

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$
$$3\sqrt{3} = \frac{1}{2} bc \sin 60^o$$
$$3\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}$$
$$bc = 12$$

Dalje ćemo oformiti sistem jednačina:

$$b + c = 7$$
$$bc = 12$$

Izrazimo c = 7 - b i zamenimo u bc = 12

$$c = 7 - b$$
$$b \cdot (7 - b) = 12$$
$$7b - b^2 = 12$$
$$b^2 - 7b + 12 = 0$$
$$b_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$
$$b_1 = 4 \Rightarrow c = 3$$
$$b_2 = 3 \Rightarrow c = 4$$

Znači imamo dve mogućnosti:

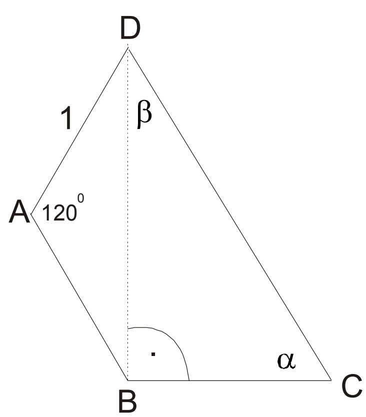
$b_1 = 4, c = 3$ ili $b_2 = 3; c = 4$

Upotrebimo sad kosinusnu teoremu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^o$$
$$a^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$$
$$a^2 = 25 - 12$$
$$a^2 = 13$$
$$a = \sqrt{13}$$

10) U tetivnom četvorouglu ABCD dijagonala BD je normalna na stranicu BC, ugao ABC= 120^0**, ugao BAD=** 120^0**, DA=1. Izračunati dijagonalu BD i stranicu CD**

Odavde je vrlo važno nacrtati skicu i postaviti problem, rešenje zatim dolazi samo po sebi:



Pošto je $\angle ABC = 120^o$ i $BD \perp BC \Rightarrow \angle ABD = 30^o$ a kako je $\angle BAD = 120^o \Rightarrow \angle ADB = 30^o$ naravno trougao ABD je jednakokraki $\Rightarrow AB = 1$ a onda nije teško naći DB

$$DB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^o \rightarrow \text{Kosinusna teorema}$$
$$DB^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$DB^2 = 3$$
$$DB = \sqrt{3}$$

Pošto se radi o <u>tetivnom</u> četvorouglu, zbir naspramnih uglova je isti!

$$120^o + \alpha = 120^o + \beta + 30^0$$
$$\alpha = 30^o + \beta \quad \text{i važi još} \quad \alpha + \beta = 90^o \text{ pa je :}$$

$$\alpha = 60^o, \beta = 30^o$$

Primenimo definiciju:

$$\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{CD}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{CD}$$
$$CD = 2$$