## GRAFIČKO REŠAVANJE SISTEMA

Najčešći tip zadatka je onaj u kome se javlja jedna **kvadratna funkcija** $y = ax^2 + bx + c$ i jedna **linearna funkcija** $y = kx + n$.

Naš savet je da najpre rešite sistem analitički ( računski) pa tek onda da crtate grafike. Ako odmah crtate grafik može se desiti da **za presek** ( preseke) koje dobijete **ne možete precizno utvrditi koordinate...**

Evo par primera:

$\boxed{\text{primer 1.}}$

**Grafički rešiti sistem:**

$$x^2 - 2x + y + 4 = 0$$
$$x + y + 2 = 0$$

**Rešenje:**

Najpre ćemo izraziti y iz obe jednačine i rešiti sistem analitički.

$$x^2 - 2x + y + 4 = 0 \rightarrow \boxed{y = -x^2 + 2x - 4}$$
$$x + y + 2 = 0 \rightarrow \boxed{y = -x - 2}$$

Sad oformimo jednu jednačinu "po x'' upoređujući leve strane ove dve jednakosti ( desne su iste)

$$-x^2 + 2x - 4 = -x - 2$$
$$-x^2 + 2x - 4 + x + 2 = 0$$
$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$a = -1; b = 3; c = -2$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$
$$x_1 = \frac{-3+1}{-2} = \frac{-2}{-2} \rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$
$$x_2 = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} \rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

Sad ove vrednosti vratimo u jednačinu $y = -x - 2$ da nađemo y koordinate:

Za $x_1 = 1$ je $y_1 = -1 - 2 \rightarrow \boxed{y_1 = -3}$ pa je jedno rešenje tačka ( 1, - 3)

Za $x_2 = 2$ je $y_1 = -2 - 2 \rightarrow \boxed{y_1 = -4}$ pa je drugo rešenje tačka ( 2,- 4)

Sad možemo i da nacrtamo grafike, ali u istom koordinatnom sistemu.

Naravno, lakše je nacrtati pravu...Uzećemo dve tačke , recimo x=0 , pa naći y, a zatim uzmemo y=0 pa nađemo x.

$y=-x-2$ imamo

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | -2 |
| y | -2 | 0 |

Kvadratnu funkciju nećemo detaljno ispitivati ( naravno, vi morate ako vaš profesor zahteva) već samo neophodne stvari:

$y=-x^2+2x-4$

**Nule funkcije:**

$$-x^2+2x-4=0$$
$$a=-1; b=2; c=-4$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)(-4)}}{2(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{-12}$$

Odavde zaključujemo da nemamo realnih rešenja, odnosno da grafik ove kvadratne funkcije nigde ne seče x osu.

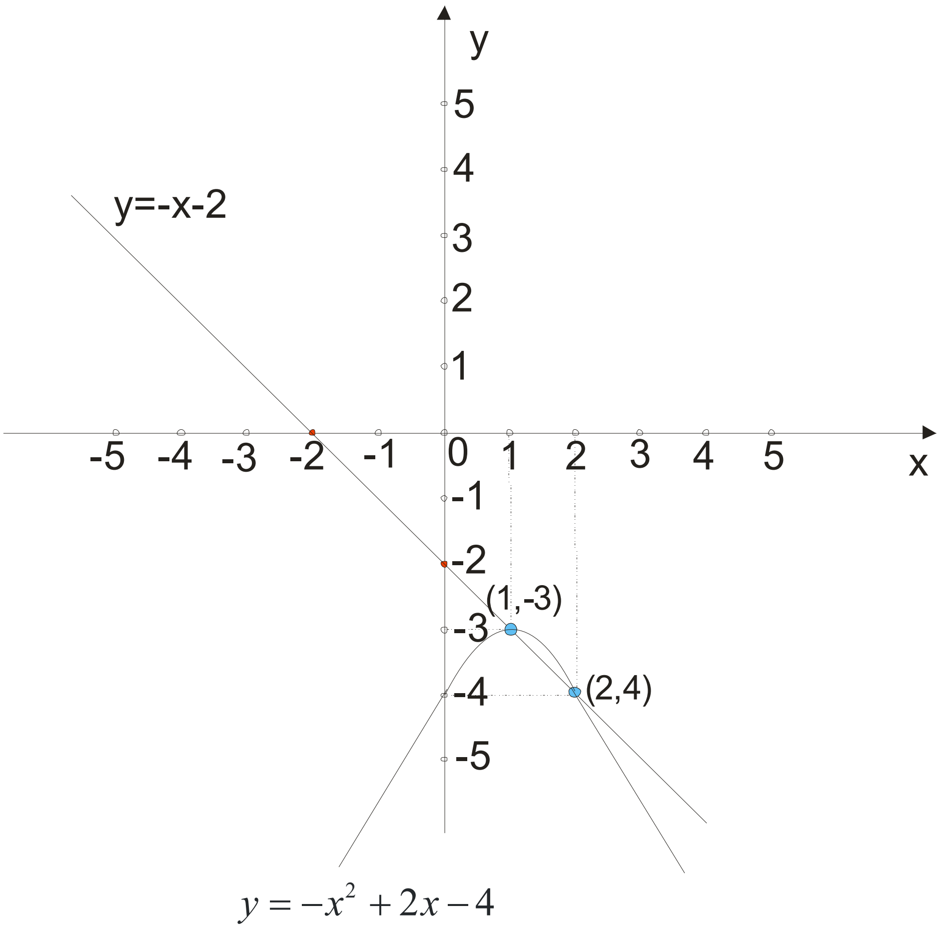
**Presek sa y osom**

Da se podsetimo, presek sa y osom je u tački c, a u ovom slučaju je $c=-4$

**Teme funkcije**

$$T(\alpha,\beta)$$
$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1$$
$$\beta=-\frac{D}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{-12}{4\cdot(-1)}=-3$$
$$T(1,-3)$$

Sada možemo nacrtati grafike :




Vidimo da se grafička rešenja poklapaju sa analitičkim.

$\boxed{\text{primer 2.}}$

**Grafički rešiti sistem:**

$$
\begin{aligned}
y &= x^2-4x+3 \\
y &= 2x-6
\end{aligned}
$$

**<u>Rešenje:</u>**

Najpre da rešimo računski:

$$
\begin{aligned}
&y = x^2-4x+3 \\
&\underline{y = 2x-6} \\
&x^2-4x+3 = 2x-6 \\
&x^2-4x+3-2x+6 = 0 \\
&x^2-6x+9 = 0 \to (x-3)^2 = 0 \to \boxed{x_1 = x_2 = 3} \to y = 2\cdot 3-6 \to \boxed{y_1 = y_2 = 0}
\end{aligned}
$$

Dakle, postoji samo jedno rešenje ovog sistema , tačka ( 3,0) . To nam govori da će se grafici prave i parabole seći samo u jednoj tački ( odnosno da je prava tangenta parabole)

**Za pravu** $y = 2x - 6$ imamo da je

| x | 0 | -3 |
|---|---|---|
| y | -6 | 0 |

**Za parabolu** $y = x^2 - 4x + 3$

**Nule funkcije:**

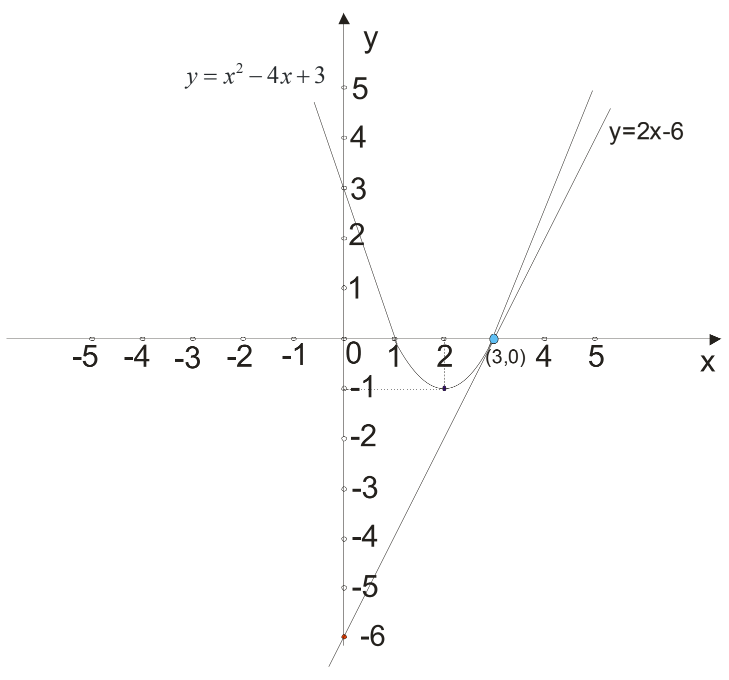
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$a = 1; b = -4; c = 3$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = 3; x_2 = 1$$

**Presek sa y osom**

Presek sa y osom je u tački $c$, a u ovom slučaju je $c = 3$

**Teme funkcije**

$$T(\alpha, \beta)$$
$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$
$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$$
$$\boxed{T(2, -1)}$$



primer 3.

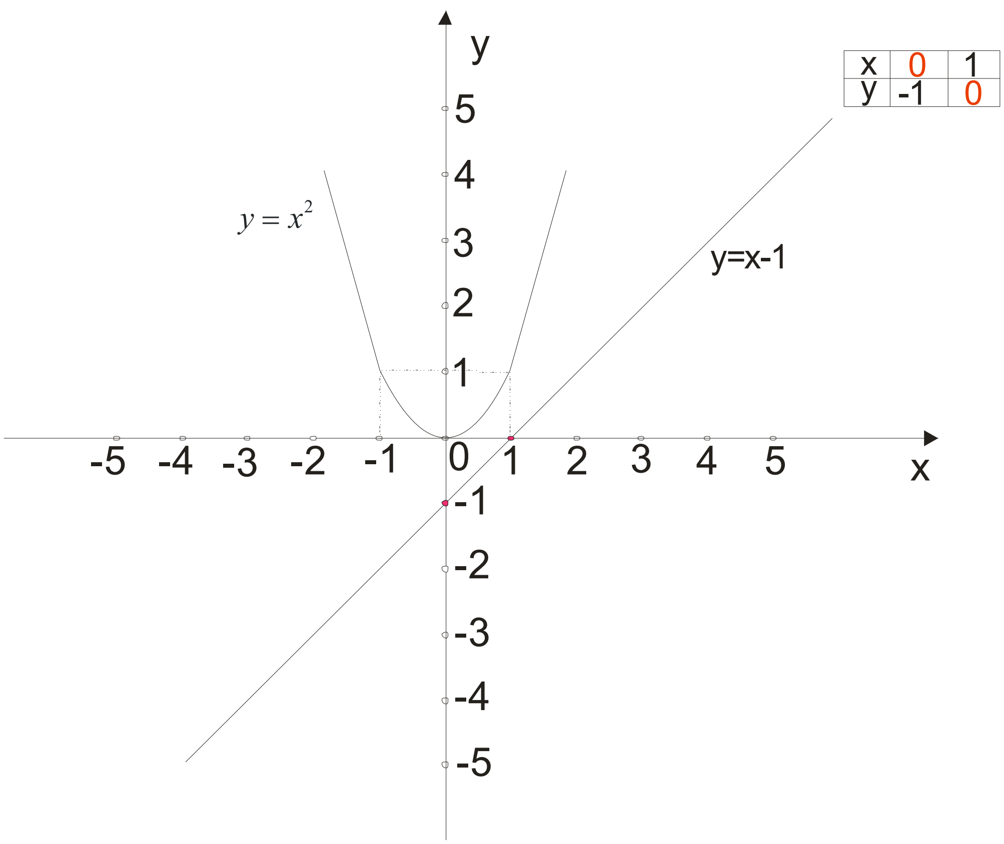
**Grafički rešiti sistem:**

$$y = x^2$$
$$y = x - 1$$

**<u>Rešenje:</u>**

$$y = x^2$$
$$\underline{y = x - 1}$$
$$x^2 = x - 1$$
$$x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \rightarrow \boxed{D < 0}$$

Sistem nema realna rešenja. Dakle, **grafici se ne seku!**




**Zaključak:**

**Kad imamo da grafički rešimo sistem** $y = ax^2 + bx + c$ **i** $y = kx + n$ **može se desiti da imamo dve presečne tačke ( primer 1.), da se seku u jednoj tački ( primer 2.) ili da nema preseka ( primer 3.)**

Evo par primera kad nije data linearna funkcija ( prava).

$\boxed{\text{primer 4.}}$

**Grafički rešiti sistem:**

$$xy = 12$$
$$x + y = 7$$

**Rešenje:**

Kao i uvek, rešimo sistem najpre računski...Iz druge jednačine izrazimo y i zamenimo u prvu jednačinu:

$$xy = 12$$
$$\underline{x + y = 7}$$
$$x + y = 7 \rightarrow y = 7 - x \rightarrow \text{ zamenimo u prvu jed. } \quad xy = 12$$
$$x(7 - x) = 12$$
$$7x - x^2 - 12 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = 3$$
$$x_1 = 4 \rightarrow y_1 = 7 - x_1 \rightarrow y_1 = 3 \rightarrow \boxed{(4,3)}$$
$$x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 7 - x_2 \rightarrow y_2 = 4 \rightarrow \boxed{(3,4)}$$

Rešili smo zadatak analitički...

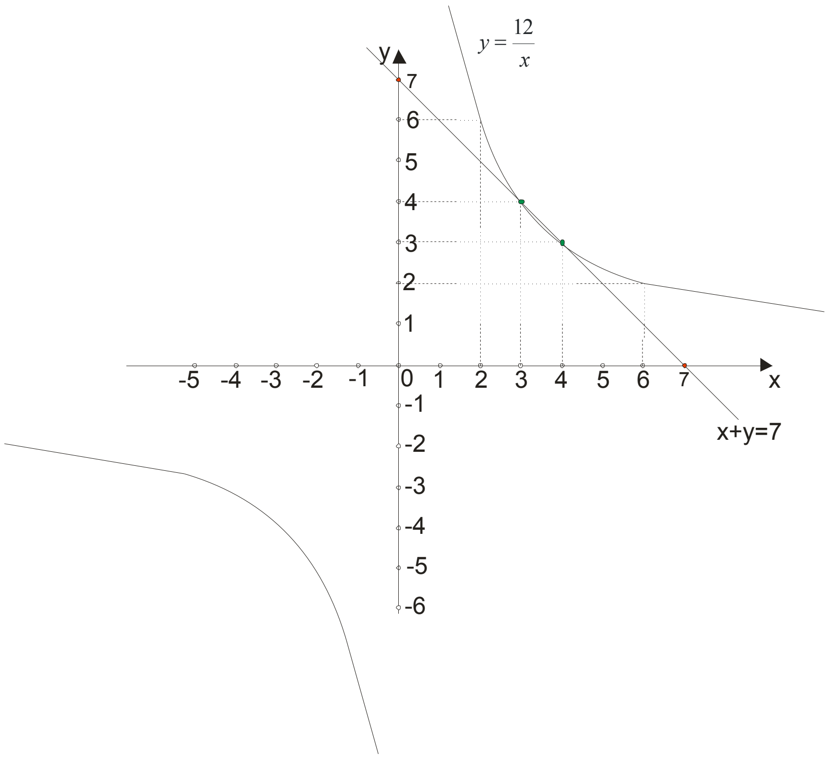
Za pravu kao i uvek, uzimamo dve tačke:

| x | 0 | 7 |
|---|---|---|
| y | 7 | 0 |

Za hiperbolu $y = \frac{12}{x}$ ćemo uzeti nekoliko tačaka, a ako se sećate od ranije, ona će pripadati prvom i trećem kvadtantu:

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -3 | -4 | -6 | -12 | 12 | 6 | 4 | 3 |

Sada skiciramo grafik:




$\boxed{\text{primer 5.}}$

**Grafički reši sistem:**

$$y = x^2 - 4x + 4$$
$$y = -x^2 + 3x - 2$$

**<u>Rešenje:</u>**

$$y = x^2 - 4x + 4$$
$$\underline{y = -x^2 + 3x - 2}$$
$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 3x - 2$$
$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \to x_1 = 2 \wedge x_2 = \frac{3}{2}$$

Sad ove vrednosti zamenimo u bilo koju od dve jednačine ( recimo u prvu) :

$$y = x^2 - 4x + 4$$
$$x_1 = 2 \wedge x_2 = \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 2 \to y_1 = 2^2 - 4\cdot 2 + 4 = 0 \to \boxed{(2,0)}$$
$$x_2 = \frac{3}{2} \to y_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{3}{2} + 4 = \frac{1}{4} \to \boxed{(\frac{3}{2},\frac{1}{4})}$$

Dobili smo tačke preseka.

Po već poznatom postupku ispitamo tok dve zadate kvadratne funkcije i skiciramo: